BTS Informatique de gestion
1re année

Denis Jaudon

Mathématiques

Cours 1

Directrice de publication : Valérie Brard-Trigo

Sommaire

Conseils généraux

Le contenu des deux fascicules dont les références sont : 8 2930 TG PA 01 et 8 2930 TE PA 02 couvre une partie importante du programme du *BTS informatique de gestion.* En effet, l'équipe pédagogique a choisi d'alléger le travail de la deuxième année du BTS, pour vous permettre de préparer l'épreuve de mathématiques dans les meilleures conditions, en laissant le temps nécessaire à l'entraînement à l'examen, par les devoirs qui vous seront proposés en deuxième année.

Nous vous proposons une progression pédagogique en six unités, comportant chacune une ou plusieurs séquences. Une séquence d'apprentissage est composée d'une partie **cours** et d'une partie **exercices « autocorrectifs »** d'égale importance dans le processus de votre apprentissage.

Ici, vous êtes en présence du fascicule cours 1 (réf. 8 2930 TG PA 01).

Cours

Le cours doit être travaillé attentivement, une lecture rapide des notions abordées ne vous servira à rien et c'est même une perte de temps. Votre progression sera le fruit d'un effort réel à fournir :

– lisez et relisez les définitions, les théorèmes et les propriétés ;
– insistez sur les conditions d'utilisation des théorèmes et des propriétés ;
– faites et refaites les exemples proposés.

Nous avons aussi prévu des renvois à des exercices d'application, signalés à l'aide du picto . Ils seront pour vous l'occasion de tester la compréhension du cours. Ces rendez-vous sont très utiles ; essayez de les respecter et de « jouer le jeu ».

Exercices « autocorrectifs »

À la fin de chaque séquence, nous avons réservé une large place à des exercices dont on vous propose une correction très détaillée. Ces exercices sont présentés sous trois formes.

- **Exercices d'application** : application presque directe du cours. À chaque fois que vous recontrerez le picto , ce sera une invitation à aller travailler les exercices proposés.
- **Exercices d'approfondissement** : ce sont des exercices qui sont à faire après l'étude complète de la séquence et qui nécessitent le plus souvent une recherche approfondie des solutions.
- **Travaux pratiques :** ils sont présents à la fin de certaines séquences et sont constitués de problèmes qui comportent les savoirs et les savoir-faire évalués à l'examen.

Les corrigés types des exercices des cours 1 et 2 sont présents dans le fascicule référencé 8 2930 TC PA 00.

Tous ces exercices nécessitent un investissement personnel important. Les corrigés ne doivent être consultés qu'après avoir effectué un travail sérieux pour trouver la solution : un corrigé rapidement consulté, sans un travail préalable, vous donnera l'impression trompeuse d'avoir compris les notions abordées.

Devoirs

Il vous est servi un fascicule (réf. 8 2930 DG PA 00) de quatre devoirs, n'hésitez pas à le consulter régulièrement. Ces devoirs sont à envoyer à la correction suivant la progression indiquée dans son sommaire et rappelée au début de chaque devoir.

Un travail sérieux donnera toujours un résultat.

L'équipe pédagogique attend de vous toutes les remarques qui contribueront à l'amélioration de ce support pour le bien de tous les inscrits.

Bon courage !

Notation

N désigne l'ensemble des nombres naturels :

{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ……………….}

N* désigne l'ensemble des nombres naturels sans le zéro :

{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ……………….}

Z désigne l'ensemble des nombres relatifs :

{………….. ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; …….}

Z contient **N**.

Z* désigne l'ensemble des nombres relatifs sans le zéro :

{…….. ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; …….}

Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

Q* désigne l'ensemble des nombres rationnels sans le zéro.

R désigne l'ensemble des nombres réels.

R* désigne l'ensemble des nombres réels sans le zéro.

$\mathbf{R}_-$ (ou $\mathbf{R}^-$) désigne l'ensemble des nombres réels négatifs.

$\mathbf{R}_+$ (ou $\mathbf{R}^+$) désigne l'ensemble des nombres réels positifs.

Unité 1

Logique – Ensembles – Algèbre de Boole

➤ Prérequis

- **Aucun**

➤ Objectifs

- Introduction à quelques éléments de logique
- Pratique élémentaire du calcul portant sur des énoncés
- Consolider et prolonger les acquis sur les ensembles et les applications.
- Effectuer des calculs permettant de simplifier des expressions booléennes

➤ Contenu

- Séquence 1 : calcul des propositions et des prédicats
- Séquence 2 : éléments de la théorie des ensembles
- Séquence 3 : algèbre de Boole

Calcul des propositions et des prédicats

Séquence 1

Prérequis

- Aucun

Objectifs

- Introduction à quelques éléments de logique
- Pratique élémentaire du calcul portant sur des énoncés

Contenu

1. Calculs propositionnels

1A. Propositions – Assertions

1B. Connecteurs logiques

2. Propriétés des opérateurs logiques

3. Calcul des prédicats

3A. Prédicat

3B. Quantificateurs

1. Calculs propositionnels

1A. *Propositions – Assertions*

Les **expressions mathématiques** sont composées de **termes** qui doivent respecter une orthographe, et d'**énoncés** qui respectent une syntaxe.

Les **termes** (« mots » mathématiques) représentent des objets.

Exemples :

$$-4\ ;\ \frac{1}{6}\ ;\ x\ ;\ \mathrm{A}\ ;\ \text{etc.}$$

Les **énoncés** (« phrases » mathématiques) énoncent un fait.

Exemples :
- $2 + 2 = 4$;
- 8 est divisible par 3 ;
- $y > 9$;
- $-x + y = 2$ ($a = b$ qu'on lit « a égale b » signifie que a et b représentent la même entité mathématique).

Mais certaines expressions n'ont aucun sens mathématique :

$$\frac{1}{0}\ ;\ + = \times\ ;\ \sqrt{-1}\ ;\ \text{etc.}$$

Parmi les énoncés précédents certains sont vrais, d'autres faux. « Vrai (V) » et « Faux (F) » sont appelés **valeurs de vérité**. La logique qui ne comporte que ces deux valeurs de vérité est appelée logique binaire : un énoncé qui n'est pas vrai est faux et réciproquement.

Exemples :
- « $2 + 2 = 4$ », « 7 est un nombre impair » sont des énoncés vrais ;
- « pour tout réel x, $x^2 + 1 < 0$ » est un énoncé faux.

Définition

Une **proposition** est un énoncé qu'on peut juger sans ambiguïté Vrai ou Faux.

■ *Notation :* les propositions sont généralement notées par des lettres majuscules (P, Q, etc.)

Exemples :
- $2+2 = 4$ est un énoncé qu'on peut juger, sans ambiguïté, qu'il est vrai donc c'est une proposition vraie.
- 8 est divisible par 3 c'est un énoncé qu'on peut juger, sans ambiguïté, qu'il est faux donc c'est une proposition fausse.
- « Monsieur Martin est sympathique », **énoncé très subjectif**, n'est pas une proposition, et l'énoncé « $x + 2 = 0$ » non plus car **la valeur de vérité dépend du réel x**.

Applications/Exercice 1

Définition

Une **assertion** est une proposition à laquelle on a attribué une valeur de vérité.

***Exemples*:** • si P est une proposition alors P = V est une assertion.
• « 8 est divisible par 2 est vraie » est une assertion vraie.
• « 8 est divisible par 3 est vraie » est une assertion fausse.

1B. Connecteurs logiques

À partir de propositions initiales, on peut définir de nouvelles propositions au moyen de **connecteurs logiques** que sont la négation, la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence. Ces transformations sont appelées des opérations logiques.

Ces opérations logiques peuvent aussi être définies par leurs tables opératoires appelées **table de vérité**.

1B1. Négation

Définition

Soit P une proposition.

On appelle « **négation** de la proposition P » la proposition vraie lorsque P est fausse et réciproquement.

■ Cette proposition est notée ¬ P (lire « non P ») ou non P ou $\overline{P}$.
¬ est le connecteur NON.

La **négation** est définie par la **table de vérité** ci-dessous :

P	¬ P
V	F
F	V

***Exemple*:** soient a une constante réelle et P la proposition « $a > 3$ ». Alors (¬ P) est la proposition « $a \leq 3$ ».

1B2. Disjonction – Conjonction

Définition

Soient P et Q deux propositions.
On appelle « **disjonction** des propositions P et Q », la proposition vraie lorsqu'au moins une de ces deux propositions est vraie.

■ Cette proposition est notée P ∨ Q (lire « P ou Q »)
∨ est le connecteur OU **inclusif.**

La **disjonction** est définie par la **table de vérité** ci-dessous :

P	Q	P ∨ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple : soit a une constante réelle.
En notant P la proposition « $a > 3$ » et Q la proposition « $a > 8$ » : P ∨ Q est la proposition « $a > 3$ ».

Remarque

Le connecteur ∨ (OU **inclusif**) utilisé en logique n'est pas le OU du langage courant : choisir « fromage ou dessert » est le plus souvent interprété comme un choix exclusif (ou l'un ou l'autre mais pas les deux).

Définition

Soient P et Q deux propositions.
On appelle « **conjonction** des propositions P et Q », la proposition vraie lorsque les deux propositions P et Q sont vraies.

- Cette proposition est notée P ∧ Q (lire « P et Q »)
  ∧ est le connecteur ET.

La **conjonction** est définie par la **table de vérité** ci-dessous :

P	Q	P ∧ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple : soit a une constante réelle.

En notant P la proposition « $a > 3$ » et Q la proposition « $a > 8$ » : P ∧ Q est la proposition « $a > 8$ ».

Applications/Exercice 2

1B3. Implication – Équivalence

Définition

Soient P et Q deux propositions.
On appelle **implication** des propositions P et Q la proposition vraie lorsque les deux propositions P et Q sont vraies ou lorsque P est fausse.

- Cette proposition est notée $P \Rightarrow Q$ (lire « Si P alors Q »), « P implique Q », « P entraîne Q ».
  $\Rightarrow$ est le connecteur SI… ALORS…

L'implication est l'opération définie par la table de vérité ci-dessous :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple :
Soit a une constante réelle. Notons P la proposition « $a > 8$ » et Q la proposition « $a > 3$ ».
Si « $a > 8$ » est vrai alors « $a > 3$ » est vrai, et si « $a > 8$ » est faux alors « $a > 3$ » est soit vrai soit faux. On a donc $P \Rightarrow Q$.

Remarque

Les deux dernières lignes de la table de vérité de « $P \Rightarrow Q$ » montrent que le sens que les mathématiques donnent aux mots « implique » et « entraîne » est plus général que le langage courant. Ainsi, les propositions : « $2 + 2 = 5$ » $\Rightarrow$ « La France a gagné la coupe **du monde en 1998** » et « La France a gagné la coupe du monde en 2002 » $\Rightarrow$ « $2 + 2 = 5$ » **sont toutes les deux vraies.**

Définition

Soient P et Q deux propositions.
On appelle **équivalence** des propositions P et Q, la proposition vraie lorsque les deux propositions P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses.

■ Cette proposition est notée P ⇔ Q (lire « P si et seulement si Q »)
⇔ est le connecteur… SI ET SEULEMENT SI…

L'équivalence est définie par la **table de vérité** ci-dessous :

P	Q	P ⇔ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple :
Soit a une constante réelle. En notant P la proposition « $a > 3$ » et Q la proposition « $a^2 > 9$ et $a > 0$ », on a P ⇔ Q.

Applications/Exercice 3

2. Propriétés des opérateurs logiques

Dans tout ce paragraphe P, Q et R désignent des propositions, V et F désignent les valeurs de vérité vrai et faux.

Les propriétés des opérateurs logiques ¬ (connecteur NON), ∨ (connecteur OU inclusif), ∧ (connecteur ET), ⇒ (connecteur SI… ALORS…) et ⇔ (connecteur SI ET SEULEMENT SI…) s'établissent à l'aide de table de vérité.
Des démonstrations sont proposées en exercices.

Propriété 1 (du connecteur NON)

a) ¬ (¬ P) = P
b) ¬ V = F et ¬ F = V

Propriété 2 (du connecteur OU inclusif)

a) idempotence : P ∨ P = P
b) commutativité : P ∨ Q = Q ∨ P
c) associativité : (P ∨ Q) ∨ R = P ∨ (Q ∨ R) que l'on peut donc noter P ∨ Q ∨ R
d) P ∨ F = P et P ∨ V = V

Propriété 3 (du connecteur ET)

a) idempotence : P ∧ P = P
b) commutativité : P ∧ Q = Q ∧ P
c) associativité : (P ∧ Q) ∧ R = P∧ (Q ∧ R) que l'on peut donc noter P ∧ Q ∧ R
d) P ∧ F = F et P ∧ V = P

Applications/Exercice 4

Propriété 4 (distributivité)

a) $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
b) $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

Exemple :
Soit a une constante réelle. Notons respectivement P, Q et R les propositions : « $a > 0$ », « $a <- 3$ » et « $3 < a$ ».
$P \wedge (Q \vee R)$ est la proposition « $(a > 0) \wedge (a < -3 \vee 3 < a)$ » c'est à dire : « $(a > 0 \wedge a < -3) \vee (a > 0 \wedge 3 < a)$ », soit « $F \vee (a > 0 \wedge 3 < a)$ ».

Donc $P \wedge (Q \vee R) =$ « $3 < a$ »

Applications/Exercice 5

Propriété 5 – Lois de De Morgan

a) $\neg (P \vee Q) = (\neg P) \wedge (\neg Q)$
b) $\neg (P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$

Exemple :
Soit a une constante réelle. Notons respectivement P et Q les propositions : « $a < -3$ » et « $3 < a$ ».

$(P \vee Q)$ est la proposition $((a < -3) \vee (3 < a))$, et $\neg (P \vee Q)$ est la proposition : $\neg ((a < -3) \vee (3 < a))$, c'est-à-dire $(-3 \leq a) \wedge (a \leq 3)$ ou encore $(-3 \leq a \leq 3)$.

Applications/Exercice 6

Propriété 6 (du connecteur ⇒)

a) réflexivité : $P \Rightarrow P$
b) anti-symétrie : Si $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ alors $P \Leftrightarrow Q$
c) transitivité : Si $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$ alors $(P \Rightarrow R)$.
d) $(P \Rightarrow Q) = (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.
e) $(P \Rightarrow Q) = (\neg P \vee Q)$.

Exemple :
Soit a une constante réelle. La proposition (vraie) « $a > 3 \Rightarrow a^2 > 9$ » est équivalente à la proposition (vraie) « $a^2 \leq 9 \Rightarrow a \leq 3$ ».

Applications/Exercice 7

3. Calcul des prédicats

3A. Prédicat

On rappelle qu'une constante est un nombre dont la valeur est fixée et qu'une variable est un nombre pouvant prendre différentes valeurs.

Définition

On appelle **prédicat** (ou fonction propositionnelle) un énoncé contenant une ou plusieurs variables et qui se transforme en proposition suivant la valeur attribuée à ces variables.

Exemples :

x étant une variable réelle, « $2x + 1 = 7$ » est un prédicat à une variable ***(encore appelé prédicat unaire)*** car si $x = 3$ alors $2x + 1 = 7$ est un énoncé vrai et si $x \neq 3$ alors $2x + 1 = 7$ est un énoncé faux.

« $5x + 5y = 15$ » est un prédicat à deux variables ***(encore appelé prédicat binaire).***

3B. Quantificateurs

3B1. Exemples et définitions

Exemple :

Pour tout réel x, on sait que $x^2 + 1 > 0$.

On note : $\forall x$, x réel $\Rightarrow x^2 + 1 > 0$.

Le symbole $\forall$ est appelé **quantificateur universel**. Il se lit ***« quel que soit »*** ou ***« pour tout »***.

Notons que « $x^2 + 1 > 0$ » est un prédicat et que « $\forall x$, x réel $\Rightarrow x^2 + 1 > 0$ » est une proposition ***(qui est ici vraie).***

Exemple :

On sait qu'il existe au moins un réel x tel que $x - 1 > 0$ (en fait tous les réels supérieurs à 1).

On note : $\exists x$, x réel $\wedge$ ($x - 1 > 0$).

Le symbole $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel**. Il se lit ***« il existe au moins »*** ou ***« pour au moins un »***.

Notons que « $x - 1 > 0$ » est un prédicat et que « $\exists x$, x réel $\wedge$ $x - 1 > 0$ » est une proposition ***(qui ici est vraie).***

3B2. Négation des quantificateurs

Soit $p\ (x)$ un prédicat à une variable :

– la négation de la proposition « $\forall x, p\ (x)$ » est la proposition « $\exists x, \neg\ p(x)$ » ;

– la négation de la proposition « $\exists x, p\ (x)$ » est la proposition « $\forall x, \neg\ p\ (x)$ ».

Exemple :

- La proposition vraie « $\exists x,\ x^2 = 4$ » a pour négation la proposition fausse : « $\forall x, x^2 \neq 4$ ».
- Puisque $(P \Rightarrow Q) = (\neg\ P \vee Q)$, la négation de la proposition $(P \Rightarrow Q)$ est la proposition $(P \wedge \neg\ Q)$.
- La négation de la proposition « $\forall x,\ x \in E \Rightarrow p(x)$ » est donc la proposition « $\exists x,\ x \in E \wedge \neg\ p(x)$ » et la négation de la proposition « $\exists x,\ x \in E \Rightarrow p(x)$ » est la proposition « $\forall x,\ x \in E \wedge \neg\ p(x)$ ».

Applications/Exercice 8

3B3. Ordre des quantificateurs

Pour x et y nombres réels, considérons les propositions :

$$« \forall x, \exists y, y = x^2 » \text{ et } « \exists y, \forall x, y = x^2 ».$$

« $\forall x, \exists y, y = x^2$ » signifie que tout réel x possède un carré y. C'est une proposition vraie. « $\exists y, \forall x, y = x^2$ » signifie qu'il existe au moins un réel y égal à tous les carrés des nombres réels. C'est une proposition fausse.

L'ordre des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ n'est donc pas indifférent.

Applications/Exercice 9

Exercices autocorrectifs

Applications

Propositions – Connecteurs

Exercice 1

Est-ce que les énoncés, ci-dessous, sont des propositions ?
P : « Monsieur Martin est né le 1er janvier »
Q : « Monsieur Martin est grand »
R : « Pour x réel, $3x + 4 = 0$ »
S : « Pour x réel, $3x^2 + 4 = 0$ »

Exercice 2

On considère les propositions vraies P : « Monsieur Martin est né le 1er janvier » et Q : « Monsieur Martin est français ».

Exprimer à l'aide d'une phrase en français les propositions :

$$\neg P, P \vee Q, P \wedge Q, P \vee (\neg Q).$$

Exercice 3

On considère les propositions P : « Monsieur Martin est né le 1er janvier » et Q : « Monsieur Martin est français ».

Exprimer à l'aide d'une phrase en français les propositions $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$.

Usage de tables de vérité

Exercice 4

Soient P, Q et R trois propositions.

1. Complétez la table de vérité ci-dessous :

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \vee R$	$Q \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

Que concluez-vous, en observant les 5e et 7e colonnes ?

2. Montrer de la même façon que $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$.

Exercice 5

Complétez la table de vérité ci-dessous :

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Que concluez-vous, , en observant les 5e et 8e colonnes ?

Exercice 6 : Lois de De Morgan

1. Complétez la table de vérité ci-dessous :

P	Q	$\neg$ P	$\neg$ Q	P $\vee$ Q	$\neg$ (P $\vee$ Q)	($\neg$ P) $\wedge$ ($\neg$ Q)
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Que concluez-vous, en observant les 5ᵉ et 6ᵉ colonnes ?

2. Montrer de la même façon que $\neg$ (P $\wedge$ Q) = ($\neg$ P) $\vee$ ($\neg$ Q).

Exercice 7

1. Complétez la table de vérité ci-dessous :

P	Q	P $\Rightarrow$ Q	$\neg$ P	($\neg$ P) $\vee$ Q
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Que concluez-vous, en observant les 3ᵉ et 5ᵉ colonnes ?

2. Déterminer la proposition contraire de la proposition P $\Rightarrow$ Q.

Usage des quantificateurs

Exercice 8

Soit P la proposition « tous les hommes sont mortels ».

1. Écrire P à l'aide du quantificateur universel.

2. Écrire $\neg$ P à l'aide du quantificateur existentiel.

Exercice 9

Soient x et y des variables **réelles**

1. Est-ce que la proposition Q : « $\exists y, \forall x, y = 2x$ » est vraie ?

2. Est-ce que la proposition R : « $\exists y, \exists x, y = 2x$ » est vraie ?

3. Est-ce que la proposition S : « $\forall y, \forall x, y = 2x$ » est vraie ?

Approfondissements

Exercice 10

Soient P et Q deux propositions logiques. La proposition $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est appelée la proposition **contra posée** de $(P \Rightarrow Q)$.

1. À l'aide d'une table de vérité montrer que $(P \Rightarrow Q) = (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

2. Exprimer à l'aide d'une phrase en français la proposition contra posée des propositions « s'il pleut alors le sol est mouillé », « si le soleil ne brille pas je reste à la maison ».

3. Exprimer à l'aide d'une phrase en français la proposition contraire des propositions précédentes.

Exercice 11

Soient P et Q deux propositions logiques. La proposition $Q \Rightarrow P$ est appelée proposition **réciproque** de $(P \Rightarrow Q)$.

1. Donner la proposition réciproque des propositions vraies :

$$« a = 3 \Rightarrow a^2 = 9 », « a = 3 \Rightarrow a^3 = 27 ».$$

2. Est-ce que les propositions réciproques sont vraies ?

Exercice 12 : Le connecteur « Nand »

Soient P et Q deux propositions logiques. On appelle connecteur Nand le connecteur logique qui à P et Q associe la proposition notée Nand (P, Q) ou $P|Q$ définie par $P|Q = \neg (P \wedge Q)$.

1. Déterminer la proposition $P|P$.

2. Écrire à l'aide du seul connecteur « Nand » les propositions :

$$\neg P,\ P \vee Q,\ P \wedge Q \text{ et } P \Rightarrow Q.$$

Exercice 13

1. Soient x et y des variables **réelles** et P la proposition :

$$« \forall x,\ \exists y,\ y = \frac{1}{2}x ».$$

a) Est-que P est une proposition vraie ?
b) Énoncer $\neg$ P.

2. Soient x et y des variables **entières** et P la proposition :

$$« \forall x,\ \exists y,\ y = \frac{1}{2}x ».$$

a) Donner un exemple montrant que $\neg$ P est vraie.
b) En déduire la valeur de vérité de la proposition P.

Exercice 14

Soient x et y des variables réelles. On considère les prédicats :

$$P(x) : « x^2 + 4 > 0 », Q(x) : « x + 4 = 0 », R(x, y) : « x^2 + y^2 > 0 ».$$

1. À l'aide du quantificateur universel transformer $P(x)$ en proposition vraie ; à l'aide du quantificateur existentiel transformer $Q(x)$ en proposition vraie ; et à l'aide de deux quantificateurs universels transformer $R(x, y)$ en proposition fausse.

2. Donner alors la négation de ces propositions.

Éléments de la théorie des ensembles

Séquence 2

➤ Prérequis

- Eléments de logique

➤ Objectifs

- Consolider et prolonger les acquis sur les ensembles et les applications.

➤ Contenu

1. Définitions

1A. Ensemble – Appartenance

Un **ensemble** **(noté généralement à l'aide d'une lettre majuscule)**, est une collection d'objets distincts appelés **éléments** **(noté généralement à l'aide d'une lettre minuscule).**

Exemples
- V = {a, e, i, o, u, y} est l'ensemble des voyelles de l'alphabet français.
- **N, Z, Q** et **R** sont respectivement les ensembles des entiers naturels (**N** = {0, 1, 2, 3, 4,...}), des entiers relatifs, des nombres rationnels et des nombres réels.
- « Les gens portant un pull gris » est un énoncé ne permettant pas de définir un ensemble.

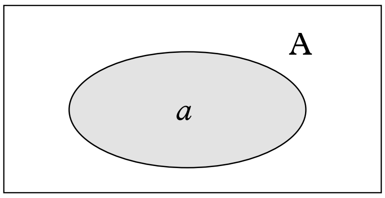
Si un élément a est élément d'un ensemble E on note : $a \in$ E et l'on dira « l'élément a appartient à l'ensemble E » ou « a est élément de l'ensemble E ».

Dans le cas contraire on note : $a \notin$ E, et l'on dira « l'élément a n'appartient pas à l'ensemble E ».

Exemples

$100 \in \mathbf{N}$, $\frac{1}{3} \notin \mathbf{Z}$, $\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$, $\sqrt{3} \in \mathbf{R}$.

On représente généralement un ensemble par un domaine plan, par exemple **un diagramme de Venn.** Les éléments qui appartiennent à l'ensemble A sont représentés par des points intérieurs à ce domaine.



L'ensemble ne contenant aucun élément est noté ∅ ou encore { } et est appelé **ensemble vide.**

Un ensemble peut se définir de 2 façons :
- en **extension** : on énumère tous les éléments de l'ensemble ;
- en **compréhension** : on énonce une propriété commune à tous ses éléments.
  A = { x | $P(x)$ } (lire « A est l'ensemble des x tels que $P(x)$ »)

Exemple

{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30} est un ensemble défini en extension et { x | x est un diviseur de 30} est le même ensemble défini en compréhension.

Applications/Exercice 1

1B. Sous-ensemble - Inclusion

Définition

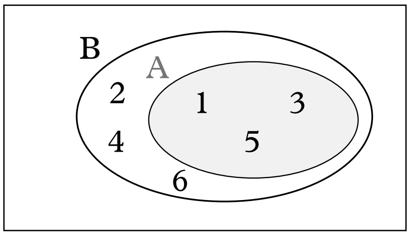
On dit qu'un ensemble A est **un sous-ensemble** d'un ensemble B (ou que A est **inclus** dans B), et on note $A \subset B$, si tout élément de A est aussi élément de B.

Les éléments x de A satisfont à la propriété :

Si $x \in A$ alors $x \in B$ (ou $x \in A \Rightarrow x \in B$).

Exemples

a) Si $A = \{1, 3, 5\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alors A est un sous-ensemble de B : $A \subset B$.

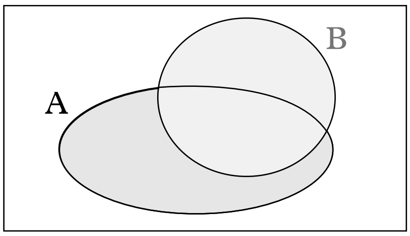


b) Pour tout ensemble A on a $\varnothing \subset A$ et $A \subset A$.

1C. Réunion - Intersection

Définition

On appelle **réunion** des ensembles A et B, l'ensemble constitué des éléments appartenant à au moins un de ces deux ensembles.



■ Cet ensemble est noté $A \cup B$ (lire « A union B »).

Les éléments x de $A \cup B$ satisfont à la propriété :

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B).$$

La définition précédente peut aussi être explicitée à l'aide de la table de vérité ci-dessous :

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{1, 3, 5, 7\}$ alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Remarquez ici que, par exemple l'élément 1 qui appartient à A et à B est présent une seule fois dans $A \cup B$.

Définition

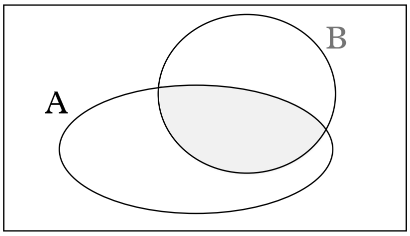
On appelle réunion des ensembles A_i, pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$, l'ensemble des éléments appartenant à l'un au moins des ensembles A_i.

On note $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ (« réunion de i égale 1 à n des A_i »).

Définition

On appelle **intersection** des ensembles A et B, l'ensemble constitué des éléments appartenant à ces deux ensembles à la fois.

Les éléments x de $A \cap B$ satisfont à la propriété : $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$.



■ Cet ensemble est noté $A \cap B$ (lire « A inter B »).

La définition précédente peut aussi être explicitée à l'aide de la **table de vérité** ci-dessous :

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{1, 3, 5, 7\}$ alors $A \cap B = \{1, 3, 5\}$.

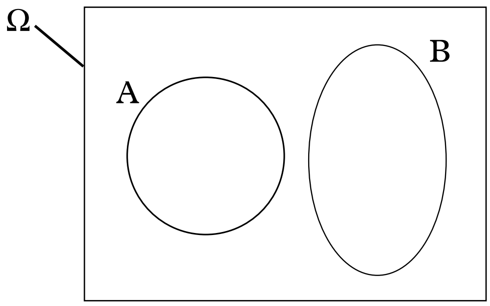
Définition

On appelle intersection des ensembles A_i , pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$, l'ensemble des éléments appartenant simultanément à tous les ensembles A_i.

On note : $A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ (« intersection de i égale 1 à n des A_i »).

Définition

Les ensembles A et B sont dits **disjoints** si $A \cap B = \varnothing$, c'est-à-dire s'ils ne possèdent aucun élément en commun.



Exemple

Si $A = \{2, 4, 6, 8\}$ et $B = \{1, 3, 5, 7\}$ alors : $A \cap B = \varnothing$

Applications/Exercice 2

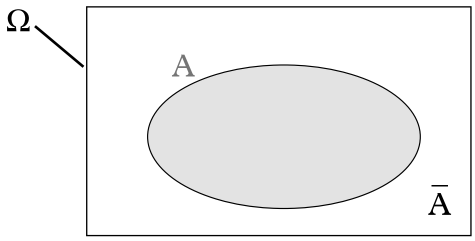
1D. Complémentaire - Différence de deux ensembles

Définition

Soient A et B deux sous-ensemble d'un ensemble Ω.

On dira que les ensembles A et B sont **complémentaires** si $\begin{cases} A \bigcup B = \Omega \\ A \bigcap B = \varnothing \end{cases}$

Le complémentaire de A par rapport à Ω, constitué des éléments n'appartenant pas à A, est noté C_{Ω}^{A} (« complémentaire de A dans Ω ») ou encore $\overline{A}$ (« A barre ») et Ω est appelé **le référentiel.**



Exemple

Dans le référentiel Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} les ensembles A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} et B = {7, 8, 9, 10} sont complémentaires l'un de l'autre.

Les éléments x de $\overline{A}$ satisfont à la propriété :

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow (x \in \Omega \wedge x \notin A).$$

La définition précédente peut aussi être explicitée à l'aide de la table de vérité ci-dessous :

$x \in A$	$x \in \overline{A}$
F	V
V	F

Remarques

a) $\overline{\Omega} = \varnothing$ et $\overline{\varnothing} = \Omega$.

b) A et $\overline{A}$ sont disjoints par définition.

Définition

On appelle **différence de deux ensembles A et B**, notée A - B, l'ensemble constitué des éléments appartenant à A et n'appartenant pas à B.

$$A - B = A \cap \overline{B} = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Exemple

Si A = {1, 2, 3, 4, 5} et B = {1, 3, 5, 7, 9} alors A - B = {2, 4}.

Remarque

Cette opération n'est ni commutative car A - B ≠ B - A et ni associative car (A-B)-C ≠ A-(B-C).

Applications/Exercice 3

1E. Ensemble des parties d'un ensemble

Définition

L'ensemble des parties d'un ensemble E, noté $\mathcal{P}$ (E), est l'ensemble dont les éléments sont tous les sous-ensembles de E.

■ Les notations suivantes sont équivalentes : $A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E)$.
On note aussi que l'on a toujours : $E \in \mathcal{P}(E)$ et $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$.

Exemple

Si $E = \{1, 2, 3\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

1F. Produit cartésien de deux ensembles

Définition

On appelle **produit cartésien** de A et B, et l'on note A x B (lire « A croix B »), l'ensemble des couples $(x\,;y)$ tels que $x \in A$ et $y \in B$, soit encore :

$$A \times B = \{(x\,;y)\,|\,x \in A \wedge y \in B\}.$$

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b\}$.

A \ B	a	b
1	$(1\,;a)$	$(1\,;b)$
2	$(2\,;a)$	$(2\,;b)$
3	$(3\,;a)$	$(3\,;b)$

alors $A \times B = \{(1\,;a), (1\,;b), (2\,;a), (2\,;b), (3\,;a), (3\,;b)\}$.

Remarques

a) Les éléments de A x B sont des **couples** : $(x\,;y) \neq (y\,;x)$, et non des **paires** : $\{x\,;y\} = \{y\,;x\}$.

b) $A \times B \neq B \times A$.

c) On note : $A \times A = A^2$, $A \times A \times A = A^3$, … , $A \times A \times \ldots \times A = A^n$ (ici A est présent n fois), ensembles respectivement formés de **couples**, de **triplets**, … , de ***n*-uplets**.

Applications/Exercice 4

1G. Ensembles finis - Cardinal d'un ensemble

Définition

Un ensemble E est dit fini s'il existe un entier naturel n tel que l'on puisse numéroter ses éléments de 1 à n. L'entier naturel n est appelé le cardinal de l'ensemble E. On note : Card E = n.

Par définition Card $\varnothing = 0$.

Exemple

Si A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} et B = {1, 3, 5, 7} alors : Card A = 6 et Card B = 4. A et B sont des ensembles finis.

Un ensemble E qui n'est pas fini est dit infini. Par exemple, **N**, **Z** et **Q** sont des ensembles infinis.

Propriété

Si A et B sont deux **ensembles finis disjoints,** c'est-à-dire tels que $A \cap B = \varnothing$, alors :

$$\text{Card } (A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B.$$

Si $(A_i)_i$ est une suite finie d'ensembles finis **deux à deux disjoints,** c'est-à-dire pour lesquels $A_i \cap A_j = \varnothing$ (pour tous indices $i \neq j$), alors :

$$\text{Card } \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \text{Card } A_1 + \text{Card } A_2 + \ldots + \text{Card } A_n.$$

La somme Card A_1 + ... + Card A_n est notée $\sum_{i=1}^{n} \text{Card } A_i$ (« sigma de i égale 1 à n de Card A_i »).

Propriété

Soit Ω un référentiel. Si A et B sont deux sous-ensembles de Ω, alors :

$$\text{Card } (A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } (A \cap B).$$

Exemple

Dans une classe, 18 élèves font de l'anglais, 10 de l'espagnol et 7 font les deux langues. Combien d'élèves sont dans la classe, si tous font au moins une langue ?
Soient $A = \{ x \mid x \text{ fait de l'anglais} \}$ et $E = \{ x \mid x \text{ fait de l'espagnol} \}$.
$A \cup E$ représente la classe et $A \cap E$ représente les élèves pratiquant les deux langues.
Par hypothèse Card A = 18, Card E = 10 et Card $(A \cap E) = 7$,
Card $(A \cup E)$ = Card A + Card E - Card$(A \cap E)$ = 18 + 10 - 7 = 21, il y a donc 21 élèves dans la classe.

Applications/Exercice 5

Propriété

Si Card E = n alors Card $\mathcal{P}$ (E) = 2^n.

(Ce qui se vérifie sur l'exemple du § 1E.).

Applications/Exercice 6

Propriété

Si A et B sont deux ensembles finis tels que $A \subset B$ alors Card A $\leq$ Card B.

Propriété

Soit Ω en référentiel et A un sous-ensemble de Ω. On a :

$$\text{Card } \overline{A} = \text{Card } \Omega - \text{Card } A.$$

Propriété

Si A et B sont des ensembles finis alors : Card $(A \times B)$ = (Card A) $\times$ (Card B).
Et pour n entier naturel : Card (A^n) = (Card A)^n.

Applications/Exercice 7

2. Propriétés des opérations définies sur les ensembles

Les propriétés des opérations $\cup$, $\cap$, $\overline{A}$ définies sur $\mathcal{P}(E)$ correspondent aux propriétés des opérations logiques $\vee$, $\wedge$, $\neg$. Ces propriétés sont donc identiques.

Elles peuvent être aisément représentées à l'aide de diagrammes de Venn.

Propriété 1 (de l'inclusion)

a) Pour tout ensemble A : $A \subset A$ (réflexivité).
b) Si A, B, C sont 3 ensembles tels que $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$ (transitivité).
c) Si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$ (antisymétrie).

Propriété 2 (du complémentaire)

a) Si Ω est le référentiel alors, $\overline{\Omega} = \varnothing$ et $\overline{\varnothing} = \Omega$.
b) $\overline{\overline{A}} = A$.
c) Si $A \subset B$ alors $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Propriété 3 (de la réunion)

a) Idempotence : $A \cup A = A$.
b) Commutativité : $A \cup B = B \cup A$.
c) Associativité : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ que l'on peut donc noter $A \cup B \cup C$.
d) Si A et B sont inclus dans C alors $A \cup B$ est inclus dans C :

$$(A \subset C \wedge B \subset C) \Rightarrow A \cup B \subset C).$$

e) Si $A \subset B$ alors : $A \cup B = B$.
f) $A \cup \varnothing = A$ et $A \cup \Omega = \Omega$ (Ω étant le référentiel).

Propriété 4 (de l'intersection)

a) Idempotence : $A \cap A = A$.
b) Commutativité : $A \cap B = B \cap A$.
c) Associativité : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ que l'on peut donc noter $A \cap B \cap C$.
d) Si A et B sont inclus dans C alors $A \cap B$ est inclus dans C :

$$(A \subset C \wedge B \subset C) \Rightarrow A \cap B \subset C.$$

e) Si $A \subset B$ alors : $A \cap B = A$.
f) $A \cap \varnothing = \varnothing$ et $A \cap \Omega = A$ (Ω étant le référentiel).

Propriété 5 (distributivité)

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Propriété 6 (loi de De Morgan)

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Applications/Exercice 8

3. Fonctions - Applications

3A. Fonction de E vers F - Application de E vers F

Définition

Soient E et F deux ensembles. Si à tout élément x de E est associé **au plus** un élément y de F par une relation f alors on dit que f est une **fonction** de E **vers** F.

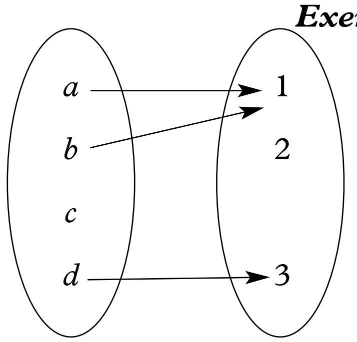
Remarque

« Au plus » signifie un ou aucun.

On note $\begin{cases} f : E \to F \\ \quad x \mapsto f(x) \end{cases}$ ou $\begin{cases} E \xrightarrow{f} F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ et $x \mapsto f(x)$ se lira "x a pour image $f(x)$".

Une fonction de E vers F peut également être définie par une représentation sagittale.

Exemple



$f(a) = f(b) = 1$; $f(d) = 3$

Définition

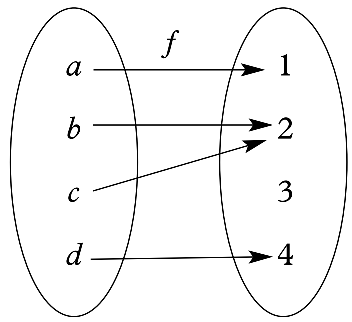
L'ensemble noté D_f des x qui ont une image par f est appelé **ensemble** (ou **domaine**) **de définition** de f.

Dans l'exemple précédent, l'élément c n'ayant pas d'image : $D_f = \{a, b, d\}$.

Définition

Soient E et F deux ensembles. Si à tout élément x de E est associé un élément y de F par la fonction f alors on dit que f est une **application** de E **vers** F.

Exemple



f est une application de $E = \{a, b, c, d\}$ vers $F = \{1, 2, 3, 4\}$.

Remarque

Soient f une fonction de E vers F et D_f son ensemble de définition. Si $E = D_f$ alors f est une application de E vers F.

Dans l'exemple précédent $E = \{a, b, c, d\} = Df$.

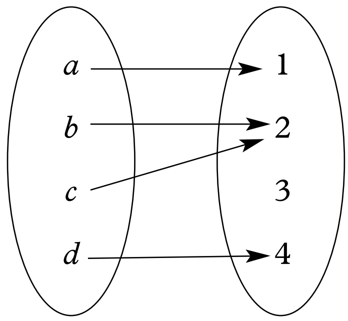
3B. Image d'une partie A de E - Image réciproque d'une partie B de F

Définition

Soient E et F deux ensembles, A un sous-ensemble de E et B un sous-ensemble de F. L'ensemble des images des éléments de A par f est appelé **image de A par** f. On le note $f(A)$.

L'ensemble des antécédents des éléments de B par f est appelé **image réciproque de B.** On le note $f^{-1}(B)$.

Exemple



$$f(\{a, c\}) = \{1, 2\} \text{ et } f^{-1}(\{2, 3, 4\}) = \{b, c, d\}.$$

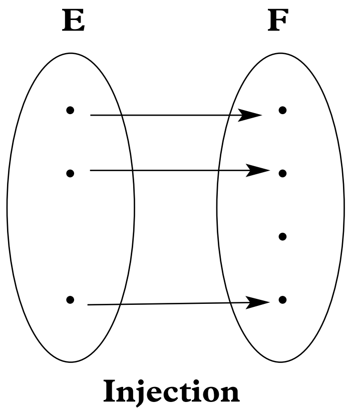
Applications/Exercice 9

3C. Injection - Surjection - Bijection

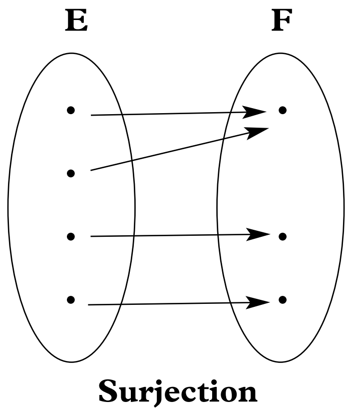
Définition

Soient E et F deux ensembles, et f est une **application** de E **dans** F. On dira que :
f est une **injection** de E **dans** F si tout élément y de F admet **au plus** [(1)] un antécédent x de E.
f est une **surjection** de E **sur** F si tout élément y de F admet **au moins**[(2)] un antécédent x de E.
f est une **bijection** de E **sur** F (ou une application bijective de E vers F) si tout élément y de F admet **un et un seul** antécédent x de E.

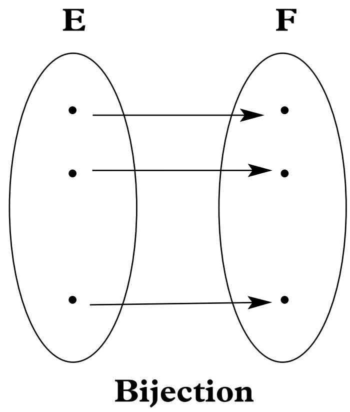
[(1)] Signifie un ou aucun.
[(2)] Signifie un ou plusieurs.



Injection



Surjection



Bijection

■ Pour déterminer si l'application f de $E \to F$ est une injection, une surjection ou une bijection, on remarquera que pour a élément donné de F :

a) Si l'équation $f(x) = a$ admet **au plus une** solution x dans E alors f est une **injection.**

b) Si l'équation $f(x) = a$ admet **au moins une** solution x dans E alors f est une **surjection.**

c) Si l'équation $f(x) = a$ admet **une et une seule** solution x dans E alors f est une **bijection.**

Exemples

On considère les applications f et g de **R** vers **R** définies par $f(x) = x^2$ *et* $g(x) = 4\text{-}x$.

1. Soit a un réel fixé, déterminons dans **R** le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$ dont l'inconnue est x.

$f(x) = a \Leftrightarrow x^2 = a.$

Si $a < 0$ alors l'équation n'a pas de solution, donc f n'est pas surjective.

Si $a = 0$ alors l'équation n'a qu'une solution $x = 0$.

Si $a > 0$ alors l'équation a deux solutions : $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$, donc f n'est pas injective.

2. Soit a un réel fixé, déterminons dans **R** le nombre de solutions de l'équation $g(x) = a$ dont l'inconnue est x.

$g(x) = a \Leftrightarrow 4 - x = a$ d'où $4 - a = x$.

L'équation $g(x) = a$ admet une et une seule solution x dans E donc f est une bijection de **R** dans **R**.

Applications/Exercice 10

3D. Composition d'applications

Définition

Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G.

On appelle **application composée de *f* par g** l'application notée gof définie de E vers G par :

$$gof(x) = g[f(x)].$$

Exemple

On considère les applications f et g de **R** dans **R** définies par :

$$f(x) = 4 - x \text{ et } g(x) = x^2 - 5.$$

- $gof(x) = g[f(x)] = (f(x))^2 - 5 = (4 - x)^2 - 5 = x^2 - 8x + 11.$
- $fog(x) = f[g(x)] = 4 - g(x) = 4 - (x^2 - 5) = = 9 - x^2.$

On remarque que $gof(x) \neq fog(x)$

Propriété 1

La composition des applications n'est pas commutative, c'est-à-dire si f et g sont deux applications alors $gof \neq fog$.

Applications/Exercice 11

Propriété 2

Si f, g et h sont trois applications alors $(hog)of = ho(gof)$.
La composition des applications est donc associative, et l'on peut noter :

$$hogof = (hog)of = ho(gof).$$

3E. Bijection réciproque

Soit f une application bijective de E vers F. Tout élément x de E admet une et une seule image y car f est une application, et tout élément y de F admet un et un seul antécédent x de E car f est bijective.

Définition

Soit f une application bijective de E vers F. On appelle **application réciproque** de :

$$\begin{cases} f : E \to F \\ \quad x \mapsto y \end{cases}$$

et l'on note f^{-1}, l'application qui à tout réel y associe son unique antécédent x :

$$\begin{cases} f^{-1} : F \to E \\ \quad y \mapsto x \end{cases}$$

Propriété

L'application f^{-1} est elle-même bijective.

Exemple

On considère l' application f définie de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3.$

Notons $y = f(x)$. Pour x réel, $y = \frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow x = 2y - 6,$

donc tout élément y de $\mathbf{R}$ admet un et un seul antécédent x de $\mathbf{R}$ et f est une bijection.

f^{-1}est définie par $\begin{cases} f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ \quad y \mapsto 2y - 6 \end{cases}$

ou encore en changeant de notation $\begin{cases} f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ \quad x \mapsto 2x - 6 \end{cases}$

Propriété

Si f est une bijection de E vers F et f^{-1} est sa bijection réciproque, alors :

$$f^{-1} of(x) = fo\, f^{-1}(x) = x$$

Exemple

Si f est définie par $\begin{cases} f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ \quad x \mapsto \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$ alors f^{-1} est définie par $\begin{cases} f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ \quad x \mapsto 2x - 6 \end{cases}$

et on a :

$$f^{-1}\ of(x) = f^{-1}\ [f(x)] = 2f(x) - 6 = 2\left(\frac{1}{2}x + 3\right) - 6 = x$$

$$fo\ \ f^{-1}(x) = f\ \left[f^{-1}(x)\right] = \frac{1}{2}f^{-1}(x) + 3 = \frac{1}{2}\ (2x - 6) + 3 = x.$$

Applications/Exercice 12

Exercices autocorrectifs

Applications

Ensembles

Exercice 1

Dans le référentiel $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, on considère les sous-ensembles :

$$A = \{ x \mid x \in \Omega \wedge x < 5 \} \quad ; \quad B = \{0, 2, 4, 6, 8\} \quad ; \quad C = \{0, 3, 6, 9\}.$$

1. Définir A en extension.

2. Définir les ensembles B et C en compréhension.

3. Représenter Ω, A, B et C à l'aide d'un diagramme de Venn.

Exercice 2

Dans le référentiel $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, on considère les sous-ensembles :

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad ; \quad B = \{0, 2, 4, 6, 8\} \quad ; \quad C = \{0, 3, 6, 9\}.$$

1. Déterminer en extension les ensembles : $A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cup B) \cap C$, $A \cup (B \cap C)$.

2. Est-ce que les ensembles A et B sont disjoints ? Est-ce que B et C sont disjoints ?

Exercice 3

Dans le référentiel $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, on considère les sous-ensembles :

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad ; \quad B = \{0, 2, 4, 6, 8\} \quad ; \quad C = \{0, 3, 6, 9\}.$$

1. Est-ce que les ensembles A et B sont complémentaires ?

2. Déterminer en extension les ensembles : $\overline{A}$; $\overline{B}$; $\overline{A \cup B}$; $\overline{A} \cup \overline{B}$; $(A \cup B) \cap C$; $A \cup (B \cap C)$.

3. Déterminer en extension les ensembles : $A - B$; $B - A$; $(A \cup B) - C$.

Exercice 4

Dans le référentiel Ω ($= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, on considère les sous-ensembles :

$$A = \{1, 4\} \quad ; \quad B = \{1, 3, 5\}.$$

Déterminer en extension les ensembles produits $A \times B$ et $B \times A$.

Exercice 5

Dans une classe de 25 élèves, 17 élèves font du football, 12 font de la natation et 5 élèves ne font aucun sport. Combien d'élèves pratiquent les deux sports ?

On posera $F = \{x \mid x \text{ fait du football}\}$ et $N = \{x \mid x \text{ fait de la natation}\}$.

Exercice 6

Dans le référentiel $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, on considère les sous-ensembles :
$A = \{1, 4\}$; $B = \{1, 3, 5\}$.

1. Déterminer Card A et Card B. En déduire Card $\mathcal{P}$ (A) et Card $\mathcal{P}$ (B).

2. Déterminer en extension les ensembles $\mathcal{P}$(A) et $\mathcal{P}$(B). Vérifier le résultat précédent.

Exercice 7

On considère les ensembles définis en compréhension par :

$$A = \{x \mid x \text{ est un diviseur de } 45\} \ ; \ B = \{x \mid x \text{ est un diviseur de } 30\}.$$

1. Déterminer en extension les ensembles A, B et $A \cap B$ et indiquer Card A, Card B et Card$(A \cap B)$.

2. Sans les déterminer en extension, en déduire le nombre d'éléments des ensembles $A \cup B$, $A - B$, de l'ensemble produit $A \times B$ et de l'ensemble produit A^3.

Exercice 8

1. Complétez la table de vérité ci-dessous :

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A \cup B$	$x \in (A \cup B) \cap C$	$x \in A \cap C$	$x \in B \cap C$	$x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Que concluez-vous ?

2. Complétez la table de vérité ci-dessous :

$x \in A$	$x \in B$	$x \in \overline{A}$	$x \in \overline{B}$	$x \in A \cup B$	$x \in \overline{A \cup B}$	$x \in \overline{A} \cap \overline{B}$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Que concluez-vous ?

8 2930 TG PA 01

Fonctions

Exercice 9

On considère la fonction f de E = $\{a, b, c, d\}$ vers F = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ définie par :
$f(a) = 2$; $f(b) = 3$; $f(c) = 5$; $f(d) = 3$.

1. Donner la représentation sagittale de f.

2. Quel est le domaine de définition D_f de f ? Est-ce que f est une application ?

3. Quelle est l'image de A = $\{a, b, d\}$ par f ?

4. Quelle est l'image réciproque de B = $\{1, 2, 5\}$ par f ?

Exercice 10

On considère la fonction f de E = $\{a, b, c, d\}$ vers F = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ définie par :
$f(a) = 2$; $f(b) = 3$; $f(c) = 5$; $f(d) = 3$.

1. Résoudre dans A les équations d'inconnue x : $f(x) = 3$ et $f(x) = 1$.

2. Est-ce que f est injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 11

On considère les applications f et g de **R** dans **R** définies par :

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ et } g(x) = 2x+5.$$

Déterminer les applications composées *gof*, *fog*, *fof et gog.*

Exercice 12

On considère l'application f définie de **R** vers **R** par $f(x) = x + 5$.

1. Monter que f est bijective.

2. Déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Approfondissements

Exercice 13

1. Si A, B et C sont trois ensembles, montrer que :

$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card } A + \text{Card } B + \text{Card } C - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(B \cap C) - \text{Card}(C \cap A) + \text{Card}(A \cap B \cap C).$$

Exercice 14

Dans une classe de lycée les élèves peuvent choisir les options : musique, dessin et 3^{e} langue vivante.
On sait que 11 élèves font de la musique, 15 font du dessin , 5 font les deux, 12 font une LV3, 2 font les trois activités, 4 ne font que du dessin et une LV3, 1 ne fait que de la musique et une LV3. Enfin 3 élèves ne font aucune activité.
Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?

Différence symétrique

Exercice 15

On appelle **différence symétrique** de deux ensembles A et B, et l'on note $A \Delta B$, l'ensemble des éléments n'appartenant qu'à l'un et l'un seulement des ensembles A et B, soit encore :

$A \Delta B = \{ x \mid (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \in B) \} = (A - B) \cup (B - A).$

On considère les ensembles $A = \{0, 2, 3, 4, 6\}$ et $B = \{1, 4, 5, 6\}$.

1. Les représenter à l'aide d'un diagramme de Venn.

2. Déterminer en extension les ensembles : $A \Delta B$, $B \Delta A$.

Exercice 16

Soit A et B deux ensembles.
Montrer que l'opérateur différence symétrique vérifie les deux propriétés suivantes :

a) $A \Delta B = B \Delta A$ (commutativité) ;

b) si $A \subset B$ alors $A \Delta B = B - A$.

Partition

Exercice 17

On dira que n ensembles **non vides** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ réalisent une **partition** d'un ensemble A si :

a) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$;

b) les ensembles A_i sont deux à deux disjoints **c. à. d** : $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tous indices $i \neq j$.

1. Est-ce-que les ensembles A = {0, 2, 6}, B = {1, 3, 5, 7} et C = {0, 1, 4, 9} réalisent une partition de l'ensemble Ω = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}?

2. Déterminer l'ensemble D afin que A, B et D réalisent une partition de l'ensemble Ω.

Fonctions

Exercice 18

On considère les applications f définie de [0 ; +∞[dans **R** par $f(x) = x^2 + 1$ et g définie de **R** - {2} dans **R** - {1} par $g(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$.

En déterminant, pour a réel donné ($a \neq 1$), le nombre de solutions des équations d'inconnue x :

$$\begin{cases} f(x) = a \\ x \in [0\ ;+\infty[\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x) = a \\ x \in \mathbf{R} - \{2\} \end{cases}$$

1. Montrer que f est injective.

2. Montrer que g est bijective.

Exercice 19

Soit f une application injective de E → F. Pour tous x et x' de E, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.
Par contraposition on aura donc : Pour tous x et x' de E, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
Pour déterminer si une application f de E → F est une injection, il suffira d'établir que : $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
Soit f l'application de [0 ; +∞[dans **R** définie par $f(x) = x^2 + 1$. Montrer que f est injective.

Exercice 20

On considère l'application f définie de **R** - {3} dans **R** - {3} par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-3}$.

1. Montrer que f est bijective.

2. Déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

3. Représenter f et f^{-1} dans un repère orthonormé.

Algèbre de Boole

Séquence 3

Prérequis

- Éléments de logique
- Notions sur les ensembles

Objectifs

- Effectuer des calculs permettant de simplifier des expressions booléennes

Contenu

1. Définitions - Propriétés

2. Représentation des fonctions booléennes

2A. Représentation des fonctions booléennes à 2 variables

2B. Représentation des fonctions booléennes à 3 variables

3. Simplification des expressions booléennes

3A. Méthode algébrique

3B. Méthode graphique pour les fonctions booléennes à 2 variables

3C. Méthode graphique pour les fonctions booléennes à 3 variables

4. Exemples d'applications

1. Définitions – Propriétés

Définitions

On considère un ensemble B muni de deux opérations que nous noterons pour cette définition + et .

On dira que le triplet (B, +, .) constitue une **algèbre de Boole** si, quels que soient les éléments a, b, c de B les opérations vérifient les propriétés suivantes :

1) $a + b \in$ B et $a.b \in$ B (on dit que + et . sont deux lois de **composition interne**) ;

2) chaque opération admet un élément unique noté respectivement 0 et 1, appelé élément neutre, vérifiant :

$$a + 0 = 0 + a = a \quad ; \quad a.\,1 = 1.\,a = a$$

3) $a + b = b + a$ *et* $a.b = b.a$ (on dit que les opérations + et. sont **commutatives**) ;

4) chacune des opérations est **distributive** par rapport à l'autre :

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$
$$a + (b.c) = (a + b).(a + c)$$

5) tout élément a admet un élément unique noté $\overline{a}$, appelé **complémentaire** de a, vérifiant :

$a\,.\,\overline{a} = 0 \quad ; \quad a + \overline{a} = 1$

Le produit booléen $a.b$ est encore noté ab et les éléments de B sont appelés **variables booléennes.**

Propriété 1 (Associativité)

Si a, b et c sont des variables booléennes alors :

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a.(b.c) = (a.b).c$$

Les opérations + et . sont dites **associatives** et l'on peut donc écrire les expressions précédentes sans parenthèse :

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$$
$$a.(b.c) = (a.b).c = abc$$

Applications/Exercice 1

Exemples d'algèbre de Boole:

1. Soit B = {0 ; 1} muni des deux opérations notées + et . définies par leur table de Pythagore :

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Alors (B, +, .) est une algèbre de Boole. On note pour les **complémentaires** que $\overline{1} = 0$ et $\overline{0} = 1$.

2. Si E est un ensemble et $\mathcal{P}$ (E) l'ensemble de ses parties alors ($\mathcal{P}$ (E), $\cap$, $\cup$) et ($\mathcal{P}$ (E), $\cup$, $\cap$) sont aussi des algèbres de Boole.

Définition

Soit B une algèbre de Boole.
On appelle **fonction booléenne** de n variables $a_1, a_2, ..., a_n$ toute application

$$f : \begin{array}{lcl} B^n & \to & B \\ (a_1 ; a_2 ; a_3 ; \; \dots \; ; a_n) & \mapsto & f(a_1 ; a_2 ; a_3 ; \; \dots \; ; a_n) \end{array}$$

Exemples

1) $\begin{cases} f : B^2 \to B \\ (a ; b) \mapsto f(a ; b) = \overline{a}\,\overline{b} \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} f : B^3 \to B \\ (a ; b ; c) \mapsto f(a ; b ; c) = ab + \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,\overline{c} + \overline{b}\,c \end{cases}$

Les expressions booléennes (expressions faisant intervenir des variables booléennes et les lois de composition + et .) peuvent dans de nombreux cas être simplifiées. Pour cela, outre les propriétés qui définissent une algèbre de Boole (B, +, .) on utilise pour leur simplification les propriétés suivantes :

Propriété 2 Idempotence – Éléments absorbants

Si a est une variable booléenne alors :
$a + a = a$; $a \,.\, a = a$ (idempotence)
$a + 1 = 1$; $a \,.\, 0 = 0$
(On dit que 1 est **élément absorbant** pour + et que 0 est **élément absorbant** pour.)

En effet :

- $a = a + 0 = a + (a.\overline{a}) = (a + a) \,.\, (a + \overline{a})$ (distributivité de + par rapport à .).
  D'où $a = (a + a).1 = a + a$.
- $a + 1 = a + (a + \overline{a}) = (a + a) + \overline{a} = a + \overline{a} = 1$.
- $aa = aa + 0 = a.a + a.\overline{a} = a.\,(a + \overline{a}) = a.1 = a$.
- $a.0 = a\,.(a\,.\,\overline{a}) = (a\,.\,a).\,\overline{a} = a.\overline{a} = 0$.

Exemples

Soient $A = b.(a + b).a$; $B = ab.\,(\overline{a} + bc)$ et $C = (a + b)(a + c)$.

$A = b.(a + b).a = b.a.\,(a + b) = b.a.a + b.a.b = b.a.a + b.b.a$
$= b.a + b.a = b.a$ (par idempotence).

$B = ab.\,(\overline{a} + bc) = ab\overline{a} + abbc$.
$= a\,\overline{a}\,b + abbc = 0 + a.b.c$ (car $a\overline{a} = 0$ et $bb = b$)
$= abc$.

$$\begin{aligned} C &= (a+b)(a+c) \\ &= aa + ac + ba + bc \text{ (par distributivité)} \\ &= a + ac + ba + bc \text{ (car } aa = a) \\ &= a.(1 + c + b) + bc \\ &= a.1 + bc \text{ (car 1 est élément absorbant pour +)} \\ &= a + bc. \end{aligned}$$

Applications/Exercice 2

Propriété 3

Si a est une variable booléenne alors il n'éxiste qu'une seule variable booléenne x vérifiant :

$a + x = 1$ et $a.x = 0$: c'est la variable $\overline{a}$.

Propriété 4

Si a est une variable booléenne, $\overline{a}$ son complémentaire et $\overline{\overline{a}}$ le complémentaire de $\overline{a}$, alors :

$$\overline{\overline{a}} = a.$$

En effet : $\overline{a}$ et $\overline{\overline{a}}$ sont complémentaires, donc $\overline{a} + \overline{\overline{a}} = 1$ et $\overline{a}.\overline{\overline{a}} = 0$

or $\overline{a} + a = 1$ et $\overline{a}.a = 0$

d'où $\overline{\overline{a}} = a$ en appliquant la propriété 3.

Exemple

Le complémentaire de $\overline{ab + c}$ est $ab + c$.

Propriété 5 : régle de De Morgan

Si a et b sont deux variables booléennes, $\overline{a}$ et $\overline{b}$ leurs complémentaires, alors :

$$\overline{a + b} = \overline{a}.\overline{b} \text{ et } \overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$$

En effet :

$(a + b) + (\overline{a}.\overline{b}) = (a + b + \overline{a}).(a + b + \overline{b}) = (1 + b).(1 + a) = 1.1 = 1$

et $(a + b).(\overline{a}.\overline{b}) = (\overline{a}.\overline{b}.a) + (\overline{a}.\overline{b}.b) = 0 + 0 = 0$

donc $(a+b)$ et $\overline{a}.\overline{b}$ sont complémentaires.

D'où $\overline{a + b} = \overline{a}.\overline{b}$ et $\overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$ en appliquant la propriété 4.

Exemple

$\overline{ab + c} = \overline{a.b} \,.\, \overline{c} = (\overline{a} + \overline{b}).\overline{c} = \overline{a}.\overline{c} + \overline{b}.\overline{c}$

Applications/Exercice 3

Propriété 6 - Règle d'absorption

Si a et b sont des variables booléennes alors :

$$a + \overline{a}\,.b = a + b$$

En effet :

$a + \overline{a}\,.b = (a + \overline{a})\ (a+b)$ (distributivité de + par rapport à .)

$= 1.(a + b) = a + b$

Exemples

Si A $= \overline{b} + bc$ alors A $= \overline{b} + c$

Si B $= \overline{a}bc + ac$ alors B $= c(a+\overline{a}b) = c(a+b) = cb + ca = ac + bc$

Applications/Exercice 4

Remarque

De : 1 + 0 = 1 et 1.0 = 0, on déduit de la propriété 3 que :

$$\overline{1} = 0 \text{ et } \overline{0} = 1$$

Définition

Un minterme de n variables booléennes est un produit de ces n variables ou de leurs complémentaires

Exemples

1. Soit deux variables a et b, alors $a.b$ et $a.\overline{b}$ sont deux mintermes
2. Soit trois variables a, b et c, alors $a\overline{b}c$ est un minterme par contre $a\overline{b}$ ne l'est pas.

Définition

On appelle **forme canonique disjonctive** de la fonction f son écriture sous forme de somme de mintermes (**cette décomposition est unique**).

Exemple

$f(a\,;b) = ab + \overline{a}\,\overline{b}$ est sous forme canonique disjonctive, mais $g(a\,;b) = a + \overline{a}b$ ne l'est pas. Sa forme canonique disjonctive est $g(a\,;b) = ab + a\overline{b} + \overline{a}b$.

2. Représentation des fonctions booléennes

2A. Représentation des fonctions booléennes à 2 variables

Les fonctions booléennes de 2 variables a et b sont représentées par le tableau ci-dessous appelé tableau de Karnaugh. Chaque case représente un produit des variables a, b ou de leur complémentaire et chacun de ces produits est appelé un **minterme**.
Pour une fonction de 2 variables ils sont au nombre de 4.

a \ b	0	1
0	$\bar{a}\,\bar{b}$	$\bar{a}.b$
1	$a.\bar{b}$	ab

Pour représenter une fonction f, on met en évidence les mintermes composant f en notant 1 dans les cases pour lesquelles $f = 1$.

Exemple 1
Pour $f(a\,;b) = ab + \bar{a}\bar{b}$, on a :

a \ b	0	1
0	1	
1		1

$ab + \bar{a}\bar{b}$

Exemple 2
Pour $g(a\,;b) = a + \bar{a}b$, on a :

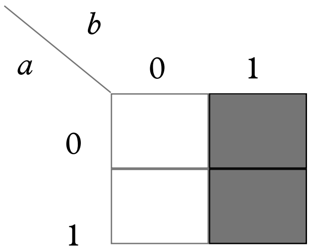
a \ b	0	1
0		1
1	1	1

$a + \bar{a}b$

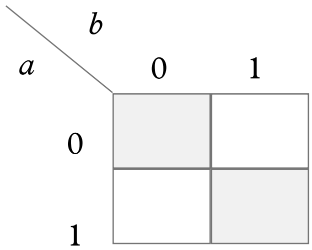
a est représenté par 2 cases adjacentes ($a\bar{b}$ et ab).

Remarque

Lorsque l'on passe d'une case à une autre case du tableau, et si une des variables seulement change d'état, les cases correspondantes sont dites **adjacentes**. Par exemple, les cases correspondant aux mintermes ab et $\overline{a}b$ sont adjacentes mais les cases correspondant aux mintermes ab et $\overline{a}\overline{b}$ ne le sont pas.



Cases adjacentes



Cases non adjacentes

2B. Représentation des fonctions booléennes à 3 variables

• **Représentation d'une variable et de son complémentaire**

Représentation de a

a \ bc	00	01	11	10
0				
1	1	1	1	1

Représentation de b

a \ bc	00	01	11	10
0			1	1
1			1	1

Représentation de c

a \ bc	00	01	11	10
0		1	1	
1		1	1	

Représentation de $\overline{a}$

a \ bc	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1				

Représentation de $\overline{b}$

a \ bc	00	01	11	10
0	1	1		
1	1	1		

a \ bc	00	01	11	10
0	1			1
1	1			1

Représentation de $\bar{c}$

• Représentation des produits de 2 variables ou leurs complémentaires

a \ bc	00	01	11	10
0				
1			1	1

Représentation de ab

a \ bc	00	01	11	10
0				
1		1	1	

Représentation de ac

a \ bc	00	01	11	10
0			1	
1			1	

Représentation de bc

a \ bc	00	01	11	10
0			1	1
1				

Représentation de $\bar{a}b$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1	1	1		

Représentation de $a\bar{b}$

a \ bc	00	01	11	10
0		1		
1		1		

Représentation de $\bar{b}c$

a \ bc	00	01	11	10
0				1
1				1

Représentation de $b\bar{c}$

a \ bc	00	01	11	10
0	1	1		
1				

Représentation de $\bar{a}\bar{b}$

a \ bc	00	01	11	10
0	1			
1	1			

Représentation de $\bar{b}\bar{c}$

a \ bc	00	01	11	10
0		1	1	
1				

Représentation de $\bar{a}c$

a \ bc	00	01	11	10
0	1			1
1				

Représentation de $\overline{a}\,\overline{c}$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1	1			1

Représentation de $a\overline{c}$

• Représentation des mintermes

a \ bc	00	01	11	10
0	1			
1				

Représentation du minterme $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$

a \ bc	00	01	11	10
0		1		
1				

Représentation du minterme $\overline{a}\,\overline{b}c$

a \ bc	00	01	11	10
0			1	
1				

Représentation du minterme $\overline{a}bc$

a \ bc	00	01	11	10
0				1
1				

Représentation du minterme $\bar{a}b\bar{c}$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1	1			

Représentation du minterme $a\bar{b}\bar{c}$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1		1		

Représentation du minterme $a\bar{b}c$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1			1	

Représentation du minterme abc

a \ bc	00	01	11	10
0				
1				1

Représentation du minterme $ab\bar{c}$

• Représentation d'une fonction booléenne quelconque de 3 variables

La représentation à l'aide d'un tableau de Karnaugh d'une fonction booléenne quelconque s'effectue en combinant les différentes représentations ci-dessus.

Exemples

1. Pour $f(a\ ;b\ ;c) = abc + \bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c}$ on a :

a \ bc	00	01	11	10
0			1	1
1			1	

2. Pour $f(a\ ;b\ ;c) = ab + \bar{a}\,\bar{c} + abc$ on a :

a \ bc	00	01	11	10
0	1			1
1			1	1

3. Pour $f(a\ ;b\ ;c) = abc + \bar{c} + ab$ on a :

a \ bc	00	01	11	10
0	1			1
1	1		1	1

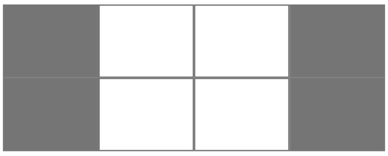
Applications/Exercice 5

Remarque

Pour 3 variables booléennes : 4 cases du tableau de Karnaugh sont dites adjacentes si elles peuvent s'écrire à l'aide d'une seule variable et 2 cases sont dites adjacentes si elles peuvent s'écrire à l'aide d'un produit de 2 variables.

1. Exemple de cases adjacentes :

$\bar{a}\,\bar{c}$



$\bar{c}$

$\bar{b}$

$a\bar{c}$

$\bar{a}$

2. Exemple de cases **non** adjacentes :

Elles ne peuvent pas s'écrire à l'aide d'un produit de 2 variables ou avec 1 variable.

3. Simplification des expressions booléennes

3A. Méthode algébrique

Les calculs s'effectuent en utilisant les règles de calcul (associativité, commutativité, absorption, idempotence, distributivité par rapport à chaque loi, etc.) vues précédemment.

Exemple

Soit (B, +, .) un triplet muni d'une structure d'algèbre de Boole.

Soit $f : B^3 \rightarrow B$ la fonction de trois variables booléennes a, b, c définie par :

$$f(a, b, c) = a\bar{b}c + ac + ab\bar{c} + \bar{a}bc$$

On peut, par exemple, écrire : $f(a, b, c) = a.(\bar{b}c + c + b\bar{c}) + \bar{a}bc$

d'où : $f(a, b, c) = a.[c.(\bar{b}+1) + b\bar{c}] + \bar{a}bc$

$= a.[c + b\bar{c}] + \bar{a}bc$ (car $\bar{b} + 1 = 1$)

$= a.(c + b) + \bar{a}bc$ (car $c + b\bar{c} = c + b$)

$= ac + ab + \bar{a}bc$

$= ac + b(a + \bar{a}c)$

$= a.c + b.(a + c)$ (car $a + \bar{a}c = a + c$).

Et finalement : $f(a, b, c) = a.c + a.b + b.c.$

Applications/Exercice 6

3B. Méthode graphique pour les fonctions booléennes à 2 variables

Pour simplifier une expression booléenne, on remplace deux cases adjacentes par une seule variable.

Exemple

Pour g définie par $g(a ; b) = a + \bar{a}b$, on a :

$a \backslash b$	0	1
0		1(1)
1	1(2)	1(3)

On remplace (2) et (3) par a et (1) et (3) par b

D'où $g(a ; b) = a + \bar{a}b = a + b$

3C. Méthode graphique pour les fonctions booléennes à 3 variables

Pour simplifier l'écriture d'une fonction à l'aide d'un tableau de Karnaugh, on regroupe les cases adjacentes par quatre (si cela est possible) ou par deux que l'on remplace à l'aide de 1 (l'unique variable qui ne change pas d'état dans les 4 cases) ou 2 variables (les deux variables qui ne changent pas d'état dans les deux cases) respectivement.

Chaque case doit être prise dans au moins un regroupement du tableau contenant un «1».

Exemples

1. Pour $f(a\,;\,b\,;\,c) = abc + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc$ *on a* :

a \ bc	00	01	11	10
0			1 (1)	1 (2)
1			1 (3)	

Le regroupement des cases notées (1) et (2) peut être remplacé par le produit $\bar{a}b$ *(ici* $\bar{a}$ *et* b *ne changent pas d'état)* ; celui de (1) et (3) par le produit bc *(ici* b *et* c *ne changent pas d'état)*. Sous forme simplifiée on aura donc : $f(a\,;\,b\,;\,c) = \bar{a}b + bc$.

2. Pour $f(a, b, c) = abc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + \bar{a}bc$, on a :

a \ bc	00	01	11	10
0			1 (1)	
1		1 (2)	1 (3)	1 (4)

On peut effectuer trois regroupements de 2 cases adjacentes ; ainsi le produit $a.c$ remplace le regroupement des cases (2) et (3) ; le produit $b.c$ remplace celui des cases (1)et (3) et le produit $a.b$ remplace celui des cases (3) et (4), d'où l'expression de f, somme de ces trois produits booléens :

$$f(a, b, c) = a.b + a.c + b.c.$$

3. Pour $f(a\,;\,b\,;\,c) = \bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c} + abc + \bar{a}\bar{b}c$, on a :

a \ bc	00	01	11	10
0	1 (1)	1 (2)	1 (3)	1 (4)
1			1 (5)	

Le regroupement des cases notées (1), (2), (3), et (4) peut être remplacé par la variable $\overline{a}$ et celui des cases notées (3) et (5) peut être remplacé par le produit *bc*. Sous forme simplifiée on aura donc : $f(a\,;b\,;c) = \overline{a} + bc$.

4. Pour $f(a\,;b\,;c) = ab + bc + \overline{a}\,\overline{c}$, on voit de même que $f(a\,;b\,;c) = b + \overline{a}\,\overline{c}$.

a \ bc	00	01	11	10
0	1		1	1
1			1	1

Applications/Exercices 7, 8

Remarques

a) La complémentaire $\overline{f}$ d'une fonction booléenne f est représentée par un tableau de Karnaugh comportant des « 1 » dans les cases vides du tableau représentatif et rien dans celles où des « 1 » sont présents .

Ainsi si on reprend la fonction $f(a, b, c) = abc + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}bc$, de l'exemple 1, $\overline{f}$ sera représentée par le tableau suivant :

a \ bc	00	01	11	10
0	1 (1)	1 (2)		
1	1 (3)	1 (4)		1 (5)

Pour simplifier $\overline{f}$ on fait dans cet exemple deux regroupements, un de 4 cases adjacentes et l'autre de 2 cases adjacentes (vous remarquerez que la case notée (5) à l'extrémité droite du tableau, constitue un groupement avec la case sur la même ligne notée (3) à l'extrémité gauche du tableau).

Les cases adjacentes (1), (2), (3) et (4) peuvent être remplacées par $\overline{b}$ (ici $\overline{b}$ est la seule variable qui ne change pas d'état dans les 4 cases).

Les cases adjacentes (3) et (5) peuvent être remplacées par $a\overline{c}$. (ici a et $\overline{c}$ ne changent pas d'état).

D'où l'expression simplifiée de $\overline{f}$:

$$\overline{f}\,(a, b, c) = \overline{b} + a\overline{c}$$

b) L'écriture de la forme simplifiée d'une fonction booléenne obtenue à l'aide d'un tableau de Karnaugh **n'est pas unique.**

Ainsi pour la fonction *f* définie par le tableau de Karnaugh suivant :

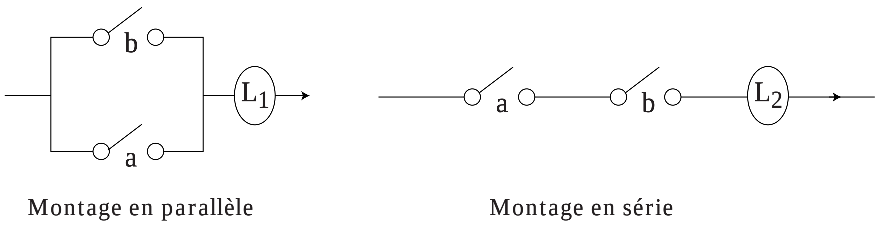
$a \backslash bc$	00	01	11	10
0	1 *(1)*	1 *(2)*		1 *(3)*
1		1 *(4)*	1 *(5)*	

$f(a, b, c) = \overline{a}\,\overline{b} + ac + \overline{a}.\overline{c}$ si l'on regroupe les cases (1) et (2) ; (4) et (5) ; (3) et (1)

$f(a, b, c) = \overline{b}\,c + ac + \overline{a}.\overline{c}$ si l'on regroupe les cases (2) et (4) ; (4) et (5) ; (3) et (1)

4. Exemple d'applications

Entre autres applications, l'algèbre de Boole est utilisée en automatisme, électricité, électronique, ... Elle permet de simplifier la réalisation de circuits électriques ; et ces derniers permettent de visualiser les opérations booléennes. Par exemple dans les montages suivants :



Notons $a = 1$ l'état où l'interrupteur a est fermé (et le courant circule) et $a = 0$ l'état contraire. Même chose pour b.

Notons $f(a,b)$ l'état où se trouve la lampe L_1 en fonction de l'état des interrupteurs a et b.

Notons $g(a,b)$ l'état où se trouve la lampe L_2 en fonction de l'état des interrupteurs a et b.

Si $f(a, b) = 1$ et $g(a, b) = 1$ signifient que les lampes L_1 et L_2 sont allumées, alors nous aurons la table de vérité suivante des différents états :

a	b	Lampe L_1 $f(a,b)$	Lampe L_2 $g(a,b)$	$a+b$	ab
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1

On en déduit que : $f(a, b) = a+b$ *et* $g(a, b) = ab$.

Un produit booléen sera donc associé à un montage en série, une somme booléenne à un montage en parallèle.
Les calculs booléens permettent ainsi de modéliser et de simplifier des circuits plus complexes comportant des montages en série, en parallèle, boutons poussoirs, va et vient, etc.

Exercices autocorrectifs

Applications

Propriétés élémentaires

Exercice 1

Simplifier l'écriture des expressions $A = (a+b).\bar{a}$ et $B = (b+\bar{b})\bar{a} + c(a+\bar{a})$.

Exercice 2

Idempotence - Eléments absorbants

Développer et simplifier les expressions :

$$A = a.(a+b),\ B = (a+b)(a+c) \text{ et } C = (a+\bar{b})(\bar{a}+\bar{b}).$$

Exercice 3

Règles de De Morgan

Déterminer le complémentaire des expressions :

$$A = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}\ ;\ B = \bar{a}.\bar{c} + bc + \bar{b}\ ;\ C = ab + \bar{a}.\bar{b}.$$

Exercice 4

Règle d'absorption

Simplifier l'écriture des expressions : $A = \bar{a} + ab$, $B = a + \bar{a}.\bar{b}$ et $C = \bar{c} + \bar{b}.c$.

Représentations

Exercice 5

Tableaux de Karnaugh

Représenter les tableaux de Karnaugh des fonctions définies par :

$$f(a,b) = ab + a\bar{b} + \bar{a}\bar{b} \text{ et } g(a,b,c) = ac + \bar{a}bc + \bar{a}\,\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c.$$

Simplifications

Exercice 6

Simplification par la méthode algébrique

Simplifier les expressions A $= \bar{a}b + \bar{a}\bar{b} + a\bar{b}$, et B $= a + \bar{a}bc + \bar{a}\,\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c$

à l'aide des règles usuelles du calcul booléen.

Exercice 7

Tableaux de Karnaugh

Les fonctions *f* et *g* sont représentées par les tableaux de Karnaugh ci dessous :

a \ bc	00	01	11	10
0	1			1
1		1	1	

a \ bc	00	01	11	10
0	1	1		
1	1			1

Donner une expression simplifiée de $f(a,b,c)$ et de $g(a,b,c)$.

Exercice 8

Simplification par tableaux de Karnaugh

Simplifier les expressions de l'exercice 6 à l'aide d'un tableau de Karnaugh.

Approfondissements

Exercice 9

Méthode algébrique

Développer et simplifier les expressions :

$$A = (a+bc)(a+\bar{b}),\ B = (\bar{a} + bc).(abc + \bar{b}) \text{ et } C = \bar{a}.\bar{b}\,(ab + bc + ca).$$

Exercice 10

Méthode algébrique - Tableaux de Karnaugh

Simplifier les expressions booléennes :

$$A = bc + a\bar{b}c + \bar{a}\bar{b} \ ; \quad B = abc + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{c} + ab\bar{c} \ ;$$

$$C = ab + bc + ca + \bar{a}b\bar{c} \ ; \ D = abc + \bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c.$$

1. À l'aide d'un tableau de Karnaugh.

2. À l'aide des règles usuelles du calcul booléen.

Exercice 11

On définit les opérateurs T et ⊕ respectivement par :

$$a \mathrm{T} b = ab + \bar{a}.\bar{b} \ ; \ a \oplus b = a\bar{b} + \bar{a}.b.$$

1. Calculer : $\bar{a} \mathrm{T} \bar{b}$, $\bar{a} \oplus \bar{b}$.

2. Vérifier que : $a \oplus b = \bar{a} \mathrm{T} b = a \mathrm{T} \bar{b} = \bar{a} \oplus \bar{b}$.

Exercice 12

Soit f la fonction de quatre variables booléennes a, b, c, d définie par :

$$f(a, b, c, d) = a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + a.\bar{c}.d + a.b.\bar{c}.d + b.\bar{c} + \bar{a}.b.c.\bar{d} + \bar{a}.\bar{b}.\bar{d} + \bar{a}.b.\bar{c}.$$

1. On suppose que la variable d prend la valeur 1.
Écrire f comme somme de trois variables booléennes : $g(a, b, c)$.

2. Simplifier la fonction g.
a) Par la méthode algébrique.
b) À l'aide d'un tableau de Karnaugh

Exercice 13

L'opérateur « nand »

L'opérateur « nand » est défini par nand $(a,\ b)\ =\ a\ |\ b\ =\ \overline{ab} = \overline{a} + \overline{b}$.

a) Calculer $(a\,|\,a)$ et $(a\,|\,a)\,|\,a$.

b) Est-ce que l'opérateur est commutatif ?

c) Exprimer $\overline{a}$, $a+b$ et ab uniquement à l'aide de l'opérateur nand.

d) Si $c = 0$, exprimer $g(a, b, c)$ *(g définie dans l'exercice 12)* uniquement à l'aide de l'opérateur nand.

Exercice 14

L'opérateur « nor »

L'opérateur « nor » est défini par nor $(a,\ b)\ =\ a \downarrow b = \overline{a+b} = \overline{a}.\overline{b}$.

a) Calculer $(a \downarrow a)$ et $(a \downarrow a) \downarrow a$.

b) Est-ce que l'opérateur est commutatif ?

c) Exprimer $\overline{a}$, $a+b$ et ab uniquement à l'aide de l'opérateur nor.

Exercice 15

(BTS IG juin 1998)

1. On considère un ensemble E muni d'une structure d'algèbre de Boole.

a) Soit l'expression $A = abc + a\overline{b}\,c + \overline{a}\,b\,c$

où a, b et c désignent trois éléments de E. Simplifier A à l'aide d'un tableau de Karnaugh.

b) Montrer, par un calcul direct, que : $A = ac + \bar{a}bc$ ou encore : $A = ac + bc$.

2. Un immeuble comprend six logements dont les surfaces figurent dans le tableau ci-dessous :

Numéro du logement	1	2	3	4	5	6
Superficie en m^2	55	105	112	228	247	253

Les logements 1 et 3 appartiennent à Monsieur A, les logements 2 et 4 appartiennent à Madame B, les 5 et 6 appartiennent à Monsieur C. Chacun détient à l'assemblée des copropriétaires un nombre de voix égal à la superficie totale de ses logements, exprimée en m^2. Ainsi, Monsieur A dispose de : 55 + 112 = 167 voix.

Une proposition concernant le remplacement de la chaudière est mise au vote à l'assemblée. Pour être adoptée, elle doit recueillir la majorité des voix, soit 501 voix.

Si A vote « pour », son vote favorable est désigné par a. S'il vote « contre », ou s'il s'abstient, son vote est désigné par : $\bar{a}$. De même pour B et C.

a) Quelle situation de vote traduit le produit booléen : $\bar{a}\,\bar{b}\,c$?

b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous pour les 8 situations de votes possibles.

Situations possibles	Nombre de voix	Proposition votée (noter oui ou non)
$a\,b\,c$	1 000	oui
$\bar{a}\,b\,c$		
$a\,\bar{b}\,c$		
$a\,b\,\bar{c}$		
$\bar{a}\,\bar{b}\,c$		
$\bar{a}\,b\,\bar{c}$		
$a\,\bar{b}\,\bar{c}$		
$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$		

c) Ecrire l'expression booléenne qui exprime la condition pour que la proposition soit adoptée.

d) En utilisant les résultats de la question 1. , écrire cette condition sous forme simplifiée, puis la traduire par une phrase explicative.

Exercice 16

(BTS IG juin 2001)

Un règlement administratif concerne les trois catégories d'individus suivantes :

- les hommes de moins de 50 ans ;
- les non-salariés ayant 50 ou plus de 50 ans ;
- les femmes qui sont soit salariées, soit non salariées et qui ont moins de 50 ans.

On définit quatre variables booléennes h, a, s, r ainsi :

x désignant un individu quelconque,

$h = 1$ si x est un homme ($h = 0$ sinon)

$a = 1$ si x est âgé(e) de 50 ou plus de 50 ans ($a = 0$ sinon)

$s = 1$ si x est salarié(e) ($s = 0$ sinon)

$r = 1$ si x est concerné(e) par le règlement ($r = 0$ sinon)

1. Quels sont les individus x pour lesquels on a $h\,\overline{a} = 1$?

2. On admet que $r = h.\,\overline{a} + \overline{s}.\,a + \overline{h}.\,(s + \overline{s}.\,\overline{a})$.
   a) Représenter r par une table de Karnaugh (ou une table de vérité).
   b) En déduire une expression simplifiée de r.
   c) Quelle est la catégorie d'individus non concernés par le règlement ?

3. En utilisant uniquement le calcul booléen, montrer que :

$$h.\overline{a} + \overline{s}.a + \overline{h}.(s + \overline{s}.\overline{a}) \;=\; \overline{a} + \overline{s} + \overline{h}.$$

(On pourra utiliser les propriétés suivantes, vérifiées par deux variables booléennes y et z : $y + yz = y$ *et* $y + \overline{y}.z = y + z$).

Travaux pratiques

TP1 – d'après sujet BTS IG

A. Soit f **la fonction booléenne** de quatre **variables booléennes** a, b, c, d définie par :

$$f(a,\ b,\ c,\ d) = ab + bcd + \overline{a}\,b\,\overline{c}\,d + \overline{a}\,\overline{b}\,c + a\,\overline{b}\,c\,\overline{d}$$

Si d prend la valeur 1, on note g la fonction de trois variables définie par :

$$g(a, b, c) = f(a, b, c, 1).$$

1. Expliciter $g(a, b, c)$.

2. Simplifier la fonction g en prenant la méthode de votre choix : méthode algébrique ou tableau de Karnaugh.

3. Déterminer la fonction $\overline{g}$, complémentaire de la fonction g.

B. Dans une entreprise, les personnes pouvant bénéficier de l'attribution d'une prime sont les suivantes :

- Toute personne de plus de 40 ans, ayant plus de 10 ans d'ancienneté.
- Toute personne de plus de 10 ans d'ancienneté ayant suivi un stage de formation dans les cinq dernières années, et gagnant moins de 1500 € par mois.
- Toute personne de moins de 40 ans, qui n'a pas suivi de stage de formation dans les cinq dernières années, mais ayant plus de 10 ans d'ancienneté et gagnant moins de 1500 € par mois.
- Toute personne de moins de 40 ans, ayant moins de 10 ans d'ancienneté mais qui a suivi un stage de formation dans les cinq dernières années.

- Toute personne de plus de 40 ans, de moins de 10 ans d'ancienneté qui a suivi un stage de formation dans les cinq dernières années bien qu'elle gagne plus de 1500 € par mois.

On note *a, b, c* et *d* les quatre variables booléennes caractérisant respectivement les propriétés « être une personne de plus de 40 ans », « avoir plus de 10 ans d'ancienneté », « avoir suivi un stage de formation dans les cinq dernières années » et « gagner moins de 1500 € par mois ».

1. a) Quelle situation traduit le produit booléen : $a\,\overline{b}\,c\,\overline{d}$?

b) Exprimer à l'aide d'une fonction booléenne les conditions caractérisant l'attribution de la prime.

2. Parmi les personnes gagnant moins de 1500 € par mois :

a) Monsieur Martin a plus de 10 ans d'ancienneté. Peut-il obtenir la prime ?

b) Même question pour Monsieur Durand qui a plus de 40 ans et moins de 10 ans d'ancienneté.

c) Quelles sont les catégories d'employés qui auront la prime ?

d) Quelles sont les catégories qui ne remplissent aucune des conditions de son obtention ?

Unité 2

Fonctions d'une variable réelle

➤ Prérequis

- **Notions de fonction et d'application**

➤ Objectifs

- Consolidation des acquis sur les fonctions
- Modélisation des phénomènes continus
- Consolidation et approfondissement des acquis sur les limites des fonctions
- Consolidation et approfondissement des acquis des classes antérieures sur les branches infinies et les asymptotes
- Consolidation et approfondissement des acquis sur les fonctions logarithme népérien, exponentielles et puissances réelles

➤ Contenu

Généralités sur les fonctions d'une variable réelle

Séquence 1

➤ Prérequis

- Notions de fonction et d'application

➤ Objectifs

- Consolidation des acquis sur les fonctions
- Modélisation des phénomènes continus

➤ Contenu

1. Définitions – rappels

1A. Définition d'une fonction numérique de variable réelle

Définition

On appelle **fonction numérique** f d'une variable réelle toute relation qui a x associe au plus un réel y.

■ *On la note :* $\begin{cases} f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ \quad x \mapsto f(x) \end{cases}$ ou $\begin{cases} \mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$

Exemples

$\begin{cases} f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto -5x^2 + 3 \end{cases}$ est une fonction définie sur $\mathbf{R}$.

$\begin{cases} g : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \dfrac{-2x^2 + x + 1}{(x-1)\ (x+3)} \end{cases}$ est une fonction définie sur $\mathbf{R} - \{-3\ ;\ 1\}$.

Rappels

1. L'ensemble (ou domaine) de définition D_f de f est l'ensemble des x qui ont une image par f.

2. Relativement à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe C représentant f est l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ; f(x))$ et C a pour équation cartésienne $y = f(x)$.

Applications/Exercice 1

Définition

Soit f une fonction définie sur le domaine D symétrique par rapport à 0. On rappelle que :

f est paire si pour tout $x \in$ D on a $f(-x) = f(x)$.

f est impaire si pour tout $x \in$ D on a $f(-x) = -f(x)$.

Exemples

$$\begin{cases} f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ \quad x \mapsto -5x^2 + 3 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} g : \mathbf{R}^\star \to \mathbf{R} \\ \quad x \mapsto -5x + \dfrac{3}{x} \end{cases}$$

sont respectivement une fonction paire définie sur **R** et une fonction impaire définie sur **R**⋆.

Remarque

Si f est paire, la courbe C d'équation $y = f(x)$ admet $(O, \vec{j})$ pour axe de symétrie, et si f est impaire C admet le point O pour centre de symétrie.

Applications/Exercice 2

1B. Comparaison des fonctions

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un même domaine D. On rappelle que :

$f = g$ si pour tout $x \in$ D on a $f(x) = g(x)$.

$f \le g$ si pour tout $x \in$ D on a $f(x) \le g(x)$.

Exemple

Soient $\begin{cases} f : \mathbf{R} - \{1\} \to \mathbf{R} \\ \quad x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \end{cases}$ et $\begin{cases} g : \mathbf{R} - \{1\} \to \mathbf{R} \\ \quad x \mapsto x + 1 \end{cases}$

$f = g$ car f et g sont définies **R** - $\{1\}$ et pour tout $x \neq 1$ on a :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1 = g(x)$$

Rappels

Soient f et g deux fonctions quelconques.

1. Les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = g(x)$ sont les abscisses x des points d'intersection de C_f et C_g.

2. Les valeurs de x pour lesquelles $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses x des points de C_f situés au-dessous de C_g.

Applications/Exercice 3

2. Fonctions usuelles

2A. Fonctions en escalier

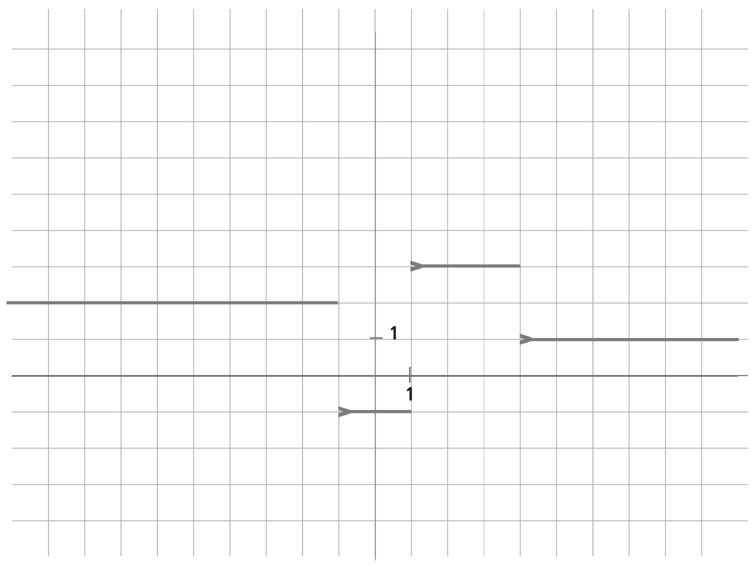
Définition

On appelle **fonction en escalier** toute fonction qui est constante sur des intervalles.

Exemple

La fonction f définie sur [-10 ; +10] par $\begin{cases} x \mapsto 2 \ \text{si} \ x \leq -1 \\ x \mapsto -1 \ \text{si} \ -1 < x \leq 1 \\ x \mapsto 3 \ \text{si} \ 1 < x \leq 4 \\ x \mapsto 1 \ \text{si} \ 4 < x \end{cases}$

est une fonction en escalier dont la représentation graphique est :



Définition

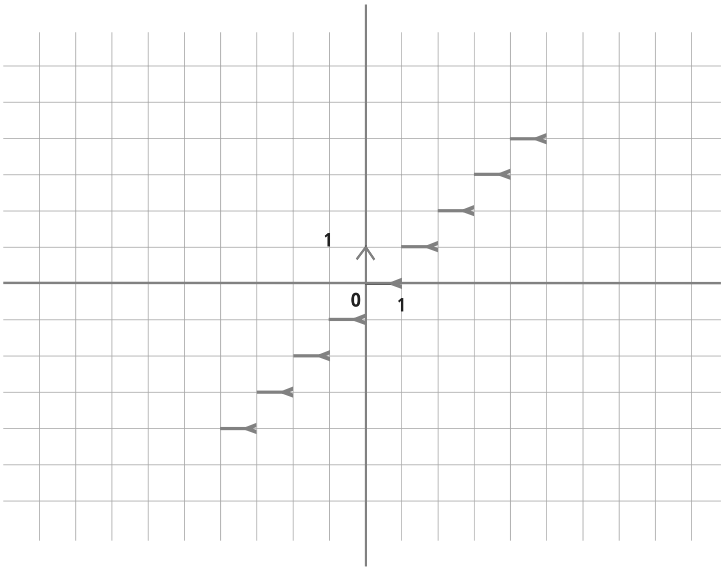
On appelle partie entière du réel x et l'on note $E(x)$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x :

$$x \in [n\,;\,n+1[\Rightarrow E(x) = n \text{ (où } n \text{ est un entier relatif).}$$

Exemple

E (1,35) = +1, E (-1,35) = -2, E(4) = 4 et E(π) = 3

La fonction partie entière est une fonction en escalier. Sa représentation graphique sur [-5 ; + 5] est :



Applications/Exercice 4

2B. Fonctions affines et affines par morceaux

Définition

On appelle fonction affine la fonction $\begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto ax+b \end{cases}$

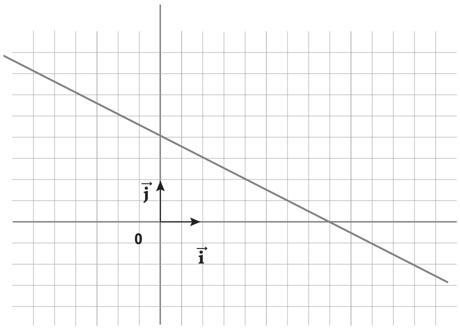
où a et b sont deux constantes réelles.

Rappels

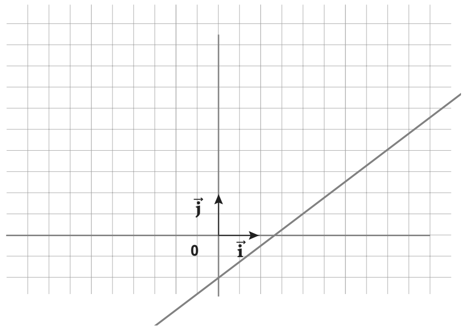
1. Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$, et si $a > 0$ alors f est strictement croissante.

2. Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la représentation graphique de f est la droite d'équation :

$$y = ax + b.$$



$a < 0$



$a > 0$

Définition

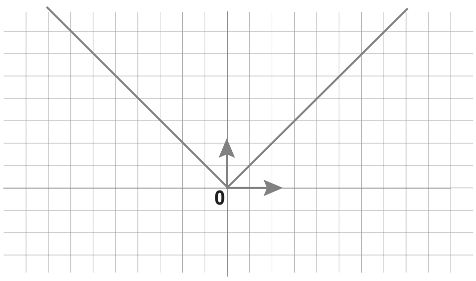
On appelle fonction affine par morceaux toute fonction qui est affine par intervalle.

Remarque

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la représentation graphique d'une fonction affine par morceaux est formée de demi-droites ou de segments de droite non parallèles à $(O, \vec{j})$.

Exemple

La fonction valeur absolue définie sur $\mathbf{R}$ par $|x| = \begin{cases} -x & si \ \ x \leq 0 \\ x & si \ \ x \geq 0 \end{cases}$ est une fonction affine par morceaux.



Applications/Exercice 5

2C. Fonction puissance entière $x \mapsto x^n$

Définition

On appelle fonction puissance entière de degré n la fonction définie par :

$$\begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases}$$

où n est un entier naturel positif.

Rappels

1. Si *n est impair* alors :

a) la fonction est strictement croissante sur **R** ;

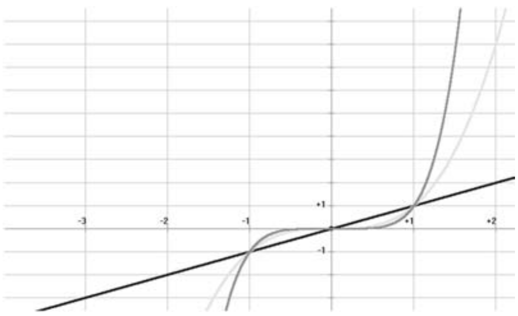
b) la fonction est impaire.

2. Si *n est pair* alors :

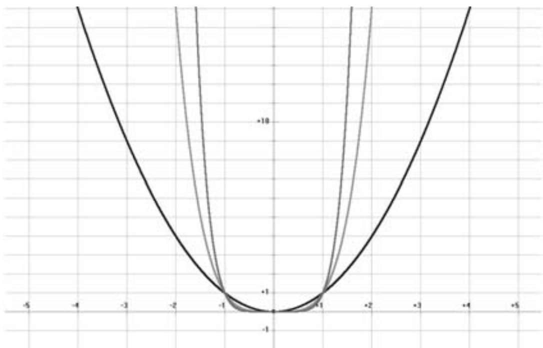
a) La fonction est strictement décroissante sur]- ∞ ; 0] et strictement croissante sur [0 ; + ∞ [;

b) La fonction est paire.

3. Courbes d'équation $y = x^n$



n impair



n pair

Propriété 1 (admise)

1. Si n est impair alors la fonction $x \mapsto x^n$ est une bijection de **R** sur **R**.

2. Si n est pair alors :

la fonction $x \mapsto x^n$ est une bijection de] - ∞ ; 0] sur [0 ; +∞ [.

la fonction $x \mapsto x^n$ est une bijection de [0 ; + ∞ [sur [0 ; +∞ [.

2D. Fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbf{N}^\star)$

Rappels

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbf{N}^\star)$.

1. Si *n est impair* alors :

a) f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

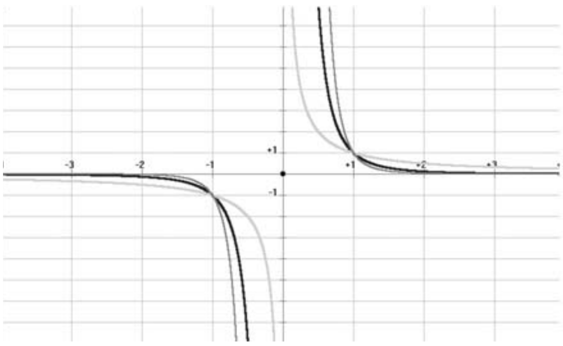
b) la fonction f est impaire.

2. Si *n est pair* alors :

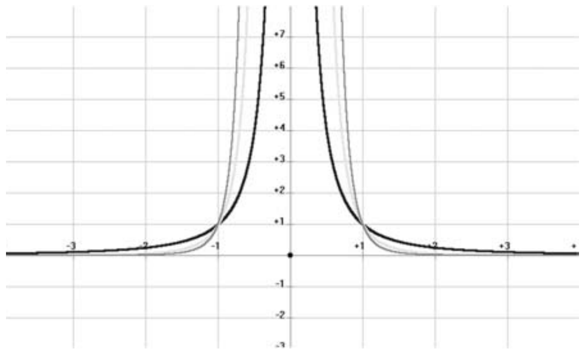
a) f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0\,[$ et strictement décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

b) la fonction f est paire.

3. Courbes d'équation $y = \dfrac{1}{x^n}$



n impair



n pair

3. Variation des fonctions – composées – réciproques

3A. Variation des fonctions

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, x_1 et x_2 deux éléments quelconques de I. On rappelle que :

f est croissante sur I si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;

f est strictement croissante sur I si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

f est décroissante sur I si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;

f est strictement décroissante sur I si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

f est constante sur I si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Exemples

1. Pour n impair, les fonctions $x \mapsto x^n$ sont strictement croissantes sur **R**.

2. Pour n pair, les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ sont strictement croissantes sur $]-\infty\ ; 0[$.

Applications/Exercice 6

3B. Composition d'applications

Définition

Soient f et g deux applications de **R** (ou d'une partie de **R**) vers **R** et telle $f(\mathbf{R}) \subset D_g$.
On rappelle que l'application composée de f par g notée gof est définie sur Df par :

$$gof\,(x) = g\,[f(x)]$$

Exemple

On considère les applications f et g de **R** dans **R** définies par :

$$f(x) = 4x - 1 \text{ et } g(x) = x^2 + x + 1.$$

$$gof\,(x) = g[f(x)] = (f(x))^2 + f(x) + 1 = (4x-1)^2 + (4x-1) + 1$$
$$= 16x^2 - 8x + 1 + 4x - 1 + 1 = 16x^2 - 4x + 1.$$

Propriété

Soient f et g deux applications et gof leur composée.
Si f et g sont croissantes alors gof est croissante.
Si f et g sont décroissantes alors gof est croissante.
Si f est décroissante et g décroissante alors gof est décroissante.
Si f est croissante et g décroissante alors gof est décroissante.

Applications/Exercice 7

3C. Propriétés des bijections réciproques

Soient f une bijection de E vers F, f^{-1} sa bijection réciproque, et (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ leurs courbes respectives dans un repère **orthonormé** $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Propriété 1

(C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques dans la symétrie orthogonale d'axe la droite $y = x$.

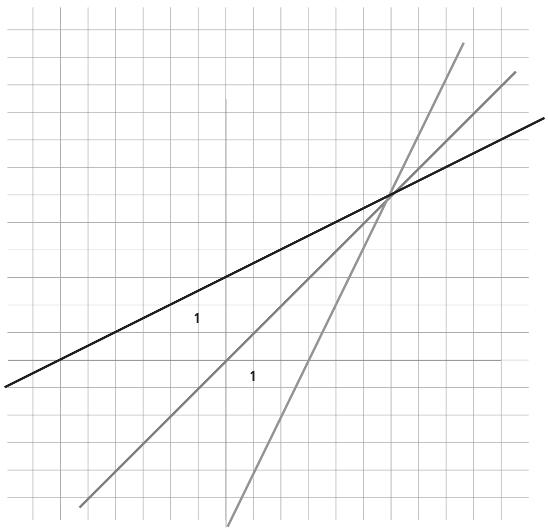
En effet Soit M (x, y) et M' (y, x) son symétrique par rapport à la droite (Δ) : $y = x$.

$$M(x, y) \in (C_f) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow M' \in (C_{f^{-1}}).$$

Exemple

Si f est définie de **R** vers **R** par $f(x) = \dfrac{x+6}{2}$ alors f^{-1} est définie par $f^{-1}(x) = 2x-6$.

Leurs représentations graphiques $\left(C_f\right)$ et $\left(C_{f^{-1}}\right)$ sont bien symétriques par rapport à la droite (Δ) : $y = x$.



Propriété 2 (rappel)

Si f est une bijection de E vers F et f^{-1} est sa bijection réciproque, alors,

$$f^{-1} o f(x) = f o f^{-1}(x) = x.$$

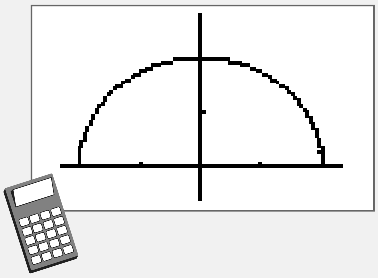
Applications/Exercice 8

Exercices autocorrectifs

Applications

Exercice 1

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ dont la représentation graphique sur [-2 ; +2] est :

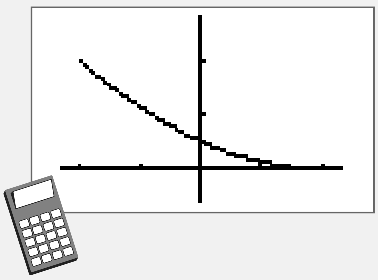


On pose : I = [-2 ; +2] et J = [0 ; + 2]. Que pensez-vous des propositions suivantes ? :

	Vrai	*Faux*
a) *f* est une application de I vers J	❐	❐
b) *f* est une surjection de I sur J............	❐	❐
c) *f* est une injection de I dans J	❐	❐
d) *f* est une bijection de I sur J	❐	❐

2. Soit *f* la fonction définie par :

$f : x \mapsto \frac{1}{8}(x-2)^2$ et dont la représentation graphique sur [-2 ; +2] est :



On pose : I = [-2 ; + 2] et J = [0 ; 2]. Que pensez-vous des propositions suivantes ? :

	Vrai	*Faux*
a) *f* est une application de I vers J	❐	❐
b) *f* est une surjection de I sur J............	❐	❐
c) *f* est une injection de I dans J	❐	❐
d) *f* est une bijection de I sur J	❐	❐

Exercice 2

1. Étudier la parité des fonctions définies ci-dessous.

a) $\begin{cases} f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto -x^2 + 3 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} g : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \dfrac{-10x^2 + 7}{x^3 + 3x} \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} h : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto |x+1| - |x-1| \end{cases}$

2. À l'aide d'une calculatrice, observer les éventuelles symétries des courbes correspondantes.

Exercice 3

1. Sur [-5 ;+5] représenter les fonctions f et g définies par

$$f : x \mapsto x^2 - 2x - 1 \text{ et } g : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2}.$$

2. En déduire graphiquement les solutions sur [-5 ; + 5] :

- **a)** de l'équation $f(x) = g(x)$;
- **b)** de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

Exercice 4

On appelle fonction partie décimale la fonction définie sur **R** par $f(x) = x - E(x)$.

1. Compléter le tableau.

x	-2	-1,5	$-\sqrt{2}$	0	0,57	1	1,5	1,81	1,95	2
$f(x)$										

2. a) Pour n fixé et $x \in [n\,;\,n+1[$ comparer $E(x) + 1$ et $E(x+1)$.

b) En déduire que pour tout x réel : $f(x+1) = f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ donner la représentation graphique de la fonction partie décimale pour $x \in [-5\,;\,+5[$.

Exercice 5

1. Montrer que les fonctions, ci-dessous, sont des fonctions affines par morceaux :

a) $\begin{cases} f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto x + 3 - |2x - 6| \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} g : \mathbf{R} - \{2\} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^2 - 4}{|2x - 4|} \end{cases}$

2. Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ donner les représentations graphique de f et de g.

Exercice 6

Donner un encadrement du réel $f(x)$ sur les intervalles indiqués :

1. $f(x) = x^3 + 4$ si $x \in [-3 ;+2]$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{x^3+4}$ si $x \in [-1 ;+2]$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{(x-4)^2}$ si $x \in [-3 ;+3]$.

Exercice 7

À l'aide des variations des fonctions usuelles, indiquer les variations des fonctions définies par :

1. $f(x) = (2x+3)^3$ sur $\mathbf{R}$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{x^3+8}$ sur $I_1 =]-\infty ;-2[$ et $I_2 =]-2 ;+\infty[$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{(x-5)^2}$ sur $I_1 =]-\infty ;+5[$ et $I_2 =]+5 ;+\infty[$.

Exercice 8

Soient f et g deux fonctions définies de $\mathbf{R}^+$ vers $\mathbf{R}^+$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
On note (C_f) et (C_g) leur représentation graphique dans un repère **orthonormé** $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que $g = f^{-1}$.

2. Représenter (C_f) et (C_g).

Approfondissements

Exercice 9

Soit f définie sur un domaine D_f symétrique par rapport à 0. On associe à f les fonctions g et h définie sur D_f par :

$$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

1. Montrer que g est paire et que h est impaire.

2. Calculer $g(x) + h(x)$. Que concluez-vous ?

Exercice 10

En utilisant les variations des fonctions usuelles et pour les valeurs de x indiquées, donner un encadrement des réels $f(x)$ ci-dessous :

a) $f(x) = \dfrac{1}{-2x+3}$ où $-3 \leq x \leq 1$

b) $f(x) = (-2x + 3)^5$ où $-3 \leq x \leq 1$

c) $f(x) = |-2x + 3|$ où $-4 \leq x \leq 5$.

Exercice 11

Fonction racine nième

1. Déterminer le nombre de solutions des équations :

a) $x^3 = -8$; **b)** $x^3 = 0$; **c)** $x^3 = 16$

2. Déterminer le nombre de solutions des équations :

a) $x^4 = -8$; **b)** $x^4 = 0$; **c)** $x^4 = 16$

3. Pour n entier non nul, on appelle racine nième du réel positif a la solution unique de l'équation $x^n = a$, et l'on note $\sqrt[n]{a}$ cette solution ou encore $a^{\frac{1}{n}}$.

Donner la valeur des réels $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[4]{81}$.

4. Soit f définie sur **R** par $f(x) = x^3 - 2$. On admet que f est une bijection de **R** sur **R**.

L'équation $x^3 - 2 = 0$ possède une unique solution $\sqrt[3]{2}$.

Nous vous proposons de trouver un encadrement de $\sqrt[3]{2}$.

a) Compléter le tableau :

x	1	1,1	1,2	1,3
$f(x)$				

b) Par approximations décimales successives donner un encadrement de $\sqrt[3]{2}$ à 10^{-3} près.

c) Comparer avec la valeur donnée par une calculatrice.

Limites des fonctions

Séquence 2

➤ Prérequis

- Généralités sur les fonctions

➤ Objectifs

- Consolidation et approfondissement des acquis sur les limites des fonctions

➤ Contenu

1. Limite d'une fonction quand x tend vers a

Dans tout ce paragraphe f est une fonction définie sur un intervalle I sur lequel la variable x peut être rendue aussi proche qu'on veut du réel a.

1A. Limite finie quand x tend vers a

1A1. Définition

Définition

On dira que ***f* admet pour limite le réel L quand *x* tend vers *a*** si l'écart $f(x) - L$ peut être rendu infiniment proche de 0, (c'est-à-dire $f(x)$ infiniment proche du réel L) pour des valeurs de x proches de a.

Exemple

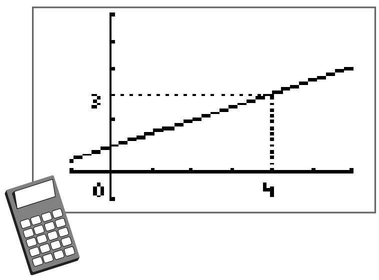
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x+1$.

Pour x réel donné, l'écart entre $f(x)$ et 3 est de :

$$f(x) - 3 = \frac{1}{2}x+1-3 = \frac{1}{2}(x-4).$$

Plus les valeurs de x seront proches de 4, et plus $\frac{1}{2}(x-4)$, c'est-à-dire $f(x) - 3$, sera proche de 0.

f admet pour limite $L = 3$ quand x tend vers 4.



Théorème d'unicité

Si f admet pour limite le réel L quand x tend vers a alors cette limite est unique.

On note indifféremment :

$$\lim_a f = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x \to a}{\to} L$$

Exemple

Pour f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ et étudiée plus haut, on note :

$$\lim_{4} f = 3 \text{ ou } \lim_{x\to 4} f(x) = 3 \text{ ou } f(x) \underset{x\to 4}{\longrightarrow} 3$$

Théorème

Si P est une fonction polynôme alors $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$.

Si R est une fonction rationnelle définie en a, alors $\lim\limits_{x\to a} R(x) = R(a)$.

Rappels

• Une fonction polynôme P est toute fonction qui s'écrit :

$$P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_1.x + a_0$$

où a_n, a_{n-1}, …, a_1 et a_0 sont des constantes réelles.

• Une fonction rationnelle R est toute fonction qui s'écrit :

$$R(x) = \frac{a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_1.x + a_0}{b_m.x^m + b_{m-1}.x^{m-1} + \ldots + b_1.x + b_0}$$

où a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 et b_m, b_{m-1}, …, b_1 et b_0 sont des constantes réelles.

Exemples

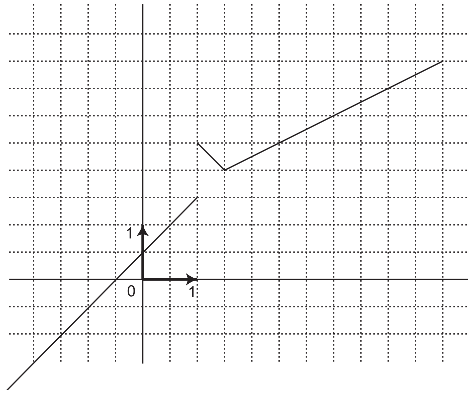
Si on considère P et R définies par : $P(x) = x^2 + 1$ et $R(x) = \frac{x+2}{x-4}$ on a :

$$\lim_{3} P = P(3) = 10 \text{ et } \lim_{3} R = R(3) = -5.$$

Applications/Exercice 1

Remarque

Les fonctions n'admettent pas nécessairement de limite quand x tend vers a. Par exemple, la fonction dont la représentation suit n'a pas de limite en $x = 1$.



Pour celles qui ont une limite et qui sont définies en $x = a$, (et plus nécessairement les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles) on a cependant :

Théorème

Soit f une fonction définie en a.
Si f admet une limite lorsque x tend vers a alors cette limite est égale à $f(a)$.

f est dite ***continue en a***, et il existe au moins un intervalle ouvert centré sur a et sur lequel la ***représentation graphique de f est continue*** c'est-à-dire d'un seul tenant.

Remarque

Les fonctions polynômes ainsi que les fonctions rationnelles, sont continues sur tout intervalle où elles sont définies, et leur représentation graphique est d'un seul tenant sur ces intervalles.

1A2. Opérations sur les limites finies

Théorème

Si $\lim\limits_a f$ et $\lim\limits_a g$ existent alors les fonctions $f+g, fg, \lambda f$ (λ constante réelle), $\dfrac{1}{g}, \dfrac{f}{g}$, admettent aussi (lorsqu'elles sont définies) une limite quand x tend vers a.

De plus :

$$\lim_a (f+g) = \lim_a f + \lim_a g$$
$$\lim_a (fg) = (\lim_a f).(\lim_a g)$$
$$\lim_a (\lambda f) = \lambda. \lim_a f$$

Si $\lim\limits_a g \neq 0$:

$$\lim_a \left(\frac{1}{g}\right) = \frac{1}{\lim\limits_a g}$$
$$\lim_a \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim\limits_a f}{\lim\limits_a g}$$

Si $\lim\limits_a f \geq 0$:

$$\lim_a \sqrt{f} = \sqrt{\lim_a f}$$

Exemples

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 3}x-\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x^2}=3-\dfrac{1}{9}=\dfrac{26}{9}.$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2-4}{2x^2+x+5}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to -1}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to -1}(2x^2+x+5)}=\dfrac{-3}{6}=-\dfrac{1}{2}.$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{3x^2-7x+10}\right)=\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-7x+10)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$

Applications/Exercice 2

Pour les fonctions rationnelles non définies pour $x = a$, leur limite finie en a peut dans certains cas être calculée comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple

La fonction $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ n'est pas définie en $x = 3$ car lorsqu'on remplace dans le dénominateur x par 3 celui-ci s'annule.

On ne peut pas appliquer directement le théorème précédent car,

« $\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-3x)}$ » se présente sous la forme "$\dfrac{0}{0}$".

Cependant pour $x \neq 3$, $\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}=\dfrac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)}$,

d'où $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}\right)=2$

(car la limite est calculée pour x proche mais différent de 3).

Remarque

Lorsque le calcul se présente sous la forme «$\dfrac{0}{0}$» on dit qu'il y a «***indétermination***» ou que le résultat est une «***forme indéterminée***».

Applications/Exercice 3

En résumé, pour L et L' constantes réelles non nulles **:**

Si…		***…alors***			
$\lim_a f$	$\lim_a g$	$\lim_a (f+g)$	$\lim_a f \quad g$	$\lim_a \frac{f}{g}$	$\lim_a \sqrt{f}$
0	*0*	*0*	*0*	*F. I*	*0*
0	*L'*	*L'*	*0*	*0*	*0*
L	*L'*	*L+L'*	*L. L'*	*L/L'*	$\sqrt{L}$

« F.I » (*forme indéterminée*) indique les cas où l'on ne peut immédiatement conclure.

1B. Limite infinie quand x tend vers a

1B1. Limites usuelles

Définition

On dira que ***f* admet pour limite + ∞ quand *x* tend vers 0** si le réel *f(x)* peut être rendu supérieur à tout nombre 10^p ($p \in \mathbf{N}^\star$), (c'est-à-dire *f(x)* peut être rendu infiniment grand) pour des valeurs de x proches de 0.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbf{R}^\star$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Pour obtenir $f(x) > 10^{50}$, il suffit que $\dfrac{1}{x^2} > 10^{50}$.

De même pour avoir $f(x) \geq 10^p$ il suffit que $\dfrac{1}{x^2} > 10^p$.

c'est-à-dire $x^2 < 10^{-p}$ soit $-10^{-p/2} < x < 10^{-p/2}$.

Définition

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$ est appelée la **limite à gauche** de f en 0 et

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$ la **limite à droite** de f en 0.

On les note encore : $\lim\limits_{0^-} f$ et $\lim\limits_{0^+} f$.

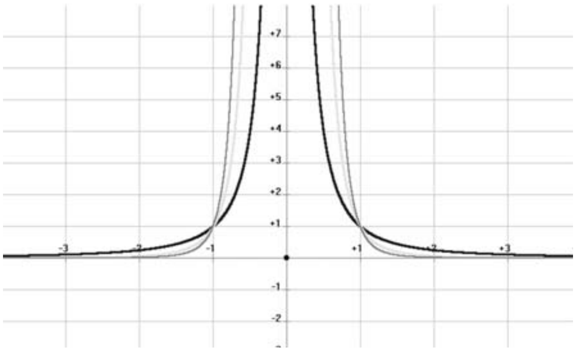
Théorème

Si $n \in \mathbb{N}^*$

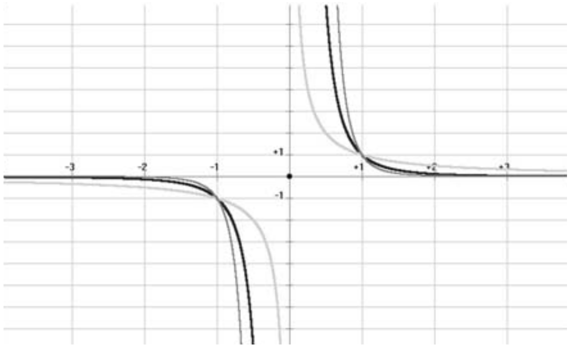
a) Si ***n* est pair** alors $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

b) Si ***n* est impair** alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$

On retrouvera les résultats précédents en observant, suivant la parité de l'entier n, les courbes d'équation $y = \frac{1}{x^n}$ et pour les valeurs de x proches de 0.



n pair



n impair

Exemples

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^3} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^3} = +\infty$.

Remarques

1. Lorsque ***n* est pair,** les limites à gauche et à droite sont égales.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ donne par exemple $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$

2. Ces résultats se généralisent aux cas où x tend vers a :

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} \frac{1}{(x-3)^5} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} \frac{1}{(x-3)^5} = +\infty$.

Applications/Exercice 4

1B2. Opérations sur les limites infinies

On résume ces opérations à l'aide des tableaux ci-dessous, où L et L' sont des constantes réelles non nulles et où « F. I.» indique les cas d' indétermination.

Limite de la somme

Si...		*... alors*
$\lim_a f$	$\lim_a g$	$\lim_a (f+g)$
L	$+\infty$	$+\infty$
L	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$F.I$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Exemples

a) on a : $\lim\limits_{x\to 2} (x+1) = 3$

et $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 2} -\dfrac{1}{(x-2)^2} = -\infty$

d'où par addition $\lim\limits_{x\to 2} \left(x+1-\dfrac{1}{(x-2)^2}\right) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^4} = +\infty$

d'où par addition $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}\right) = +\infty$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$

d'où par addition $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right) = -\infty$

Limite du produit, de l'inverse et du quotient

Si...		... alors		
$\lim_a f$	$\lim_a g$	$\lim_a fg$	$\lim_a \frac{1}{g}$	$\lim_a \frac{f}{g}$
0	$+\infty$	F.I	0	0
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$	0	0
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$L>0$	$-\infty$	$-\infty$	0	0
$L<0$	$-\infty$	$+\infty$	0	0
$+\infty$	$L'>0$	$+\infty$	$1/L'$	$+\infty$
$+\infty$	$L'<0$	$-\infty$	$1/L'$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	F.I
$-\infty$	$L'>0$	$-\infty$	$1/L'$	$-\infty$
$-\infty$	$L'<0$	$+\infty$	$1/L'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	F.I

Cas particulier où $\lim_a g = 0$: pour déterminer $\lim_a \frac{1}{g}$ et $\lim_a \frac{f}{g}$

Si...		... alors		
$\lim_a f$	g est	$\lim_a fg$	$\lim_a \frac{1}{g}$	$\lim_a \frac{f}{g}$
0	*positive*	0	$+\infty$	F.I
0	*négative*	0	$-\infty$	F.I
$L>0$	*positive*	0	$+\infty$	$+\infty$
$L<0$	*positive*	0	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	*positive*	F.I	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	*négative*	F.I	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	*positive*	F.I	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	*négative*	F.I	$-\infty$	$+\infty$

Exemples

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{(x-2)^2} = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to 2} (x+1) = 3$ et $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} (2x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \left(\dfrac{5}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^3}\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \dfrac{5}{x+1} = -\infty$ ($5 > 0$ et $x+1 < 0$ pour $x < -1$)

et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \left(\dfrac{1}{(x+1)^3}\right) = -\infty$ ($1 > 0$ et $(x+1)^3 < 0$ pour $x < -1$).

Applications/Exercice 5

Remarque

Les *formes indéterminées*, sont les cas où le calcul des limites se présente sous l'une des formes

$$"\frac{0}{0}" \quad "0\times(\pm\infty)" \quad "(+\infty)"-"(+\infty)" \quad "\frac{\infty}{\infty}"$$

Exemple

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{3}{x^4} = -\infty$

donc on est en présence d'une **forme indéterminée** lorsqu'on étudie la limite en 0 de $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{x^4}$.

Cependant on conclura en écrivant : $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{x^4} = \dfrac{x^2-3}{x^4}$

$\lim\limits_{x\to 0} (x^2-3) = -3$ et $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^4}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{x^4}\right) = -\infty$.

Applications/Exercice 6

2. Limite d'une fonction quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$

2A. Limite finie quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$

Définition

On dira que ***f* admet pour limite le réel *L* quand *x* tend vers $+\infty$** si l'écart $f(x) - L$ peut être rendu infiniment proche de 0, (c'est-à-dire $f(x)$ infiniment proche du réel L) pour des valeurs de x infiniment grandes.

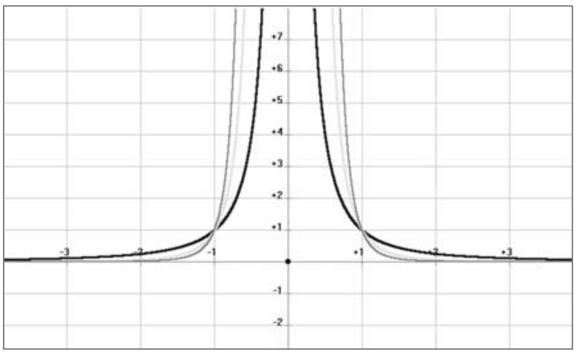
2A1. Limites usuelles

Théorème

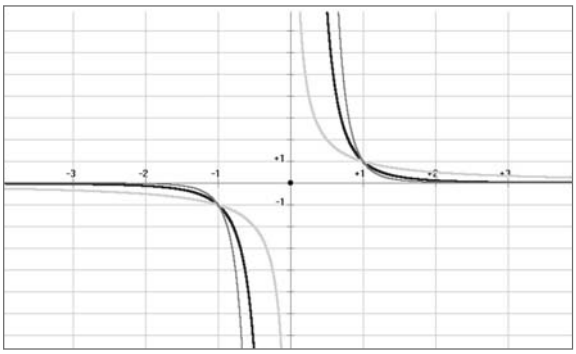
Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

On retrouve les résultats précédents en observant les courbes d'équation $y = \dfrac{1}{x^n}$ pour les valeurs de x proches de $-\infty$ et de $+\infty$.



n pair



n impair

Exemples

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{12}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{17}} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^{12}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^{17}} = 0$

2A2. Opérations sur les limites quand x tend vers $+\infty$ ou quand x tend vers $-\infty$

Les résultats sont identiques à ceux présentés dans les tableaux du § 1.B.2 et dans lesquels on remplacera $\lim\limits_{a} f$ par $\lim\limits_{-\infty} f$ ou par $\lim\limits_{+\infty} f$.

Exemples

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 5 = 5$ donc par addition $\lim\limits_{x\to+\infty} (5 + \dfrac{1}{x^2}) = 5$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (-3) = -3$

donc par multiplication $\lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{-3}{x^2}) = 0$

c) Cas d'une forme indéterminée :

$\lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{5x^2 - 3}{x^2})$ est une forme indéterminée de type "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

On pourra cependant conclure en écrivant :

$$\frac{5x^2 - 3}{x^2} = \frac{x^2(5 - \frac{3}{x^2})}{x^2} = 5 - \frac{3}{x^2}.$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 5 = 5$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{5x^2 - 3}{x^2}) = 5.$

Applications/Exercice 7

2B. Limite infinie quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$

Définition

On dira que ***f* admet pour limite $+\infty$ quand *x* tend vers $+\infty$** si le réel $f(x)$ peut être rendu supérieur à tout nombre 10^p ($p \in \mathbb{N}^*$), (c'est-à-dire $f(x)$ peut être rendu infiniment grand) pour des valeurs de x infiniment grandes.

2B1. Limites usuelles

Théorème

Soit n un entier naturel non nul.

a) Si n est pair alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

b) Si n est impair alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

Exemples

a) Pour n pair : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$

b) Pour n impair : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$

2B2. Opérations sur les limites quand x tend vers $+\infty$ ou quand x tend vers $-\infty$

Les résultats sont identiques à ceux présentés dans les tableaux du § 1.B.2 et dans lesquels on remplacera $\lim\limits_{a} f$ par $\lim\limits_{-\infty} f$ ou par $\lim\limits_{+\infty} f$

Exemples

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, donc

$\lim\limits_{x\to-\infty} (5x^3 + 2x) = 5\times \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 + 2\times \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} (5x^3 + 2x) = 5\times \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 + 2\times \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

Applications/Exercice 8

Remarque

Il existe ici aussi des situations où nous ne pourrons conclure immédiatement.

Exemples

a) $x^3 - 2x$ présente une **forme indéterminée** de type "$(+\infty) - (+\infty)$" en $+\infty$.

b) $\dfrac{x^2-2}{2x+1}$ présente une **forme indéterminée** de type "$\dfrac{\infty}{\infty}$" en $+\infty$.

On pourra cependant conclure en utilisant les résultats énoncés dans le § ci-dessous.

2C. Comportement des polynômes et des fonctions rationnelles quand x tend vers $+\infty$ ou x tend vers $-\infty$

Théorème 1 : comportement des polynomes

Soit P le polynôme défini par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ (où $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ *et* a_0 sont des constantes réelles et $a_n \neq 0$), alors ***à l'infini*** :

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n.$$

Nous dirons qu'au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$, ***un polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré.***

Exemples

a) Pour le polynôme $x^3 - 2x$ qui se présente sous une FI de type «$(+\infty) - (+\infty)$», en $+\infty$ nous aurons :

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3-2x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

b) De même, pour le polynôme $2x^3 - 2x$ qui se présente sous une FI «de type «$(-\infty) - (-\infty)$», en $-\infty$ nous aurons :

$$\lim_{x\to-\infty}(2x^3-2x) = 2\times\lim_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty.$$

Applications/Exercice 9

Théorème 2 : comportement des fonctions rationnelles

Soient P et R les polynômes définis par
$P(x) = a_n.x^n + \ldots + a_1.x + a_0$ (où $a_n, \ldots, a_1$ *et* a_0 sont des constantes réelles et $a_n \neq 0$)
$Q(x) = b_p.x^p + \ldots + b_1.x + b_0$ (où $b_p, \ldots, b_1$ *et* b_0 sont des constantes réelles et $b_p \neq 0$)
Alors la fonction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ a pour limites ***à l'infini :***

$$\lim_{x\to-\infty} R(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n\ x^n}{b_p\ x^p} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} R(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n\ x^n}{b_p\ x^p}.$$

Nous dirons qu'au voisinage de -∞ et de +∞, une ***fonction rationnelle se comporte comme le quotient de ses termes de plus haut degré.***

Applications/Exercice 10

3. Autres théorèmes relatifs aux limites

3A. Limites et inégalités

Les théorèmes ci-dessous établis pour $x \to a$ restent valables quand $x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$ et pour des fonctions *f*, *g* et *h* dans des domaines convenablement définis.

Théorème

Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$.

a) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.

b) Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Exemple

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = x - 1$ et $g(x) = x + \sin x$.

La fonction *sin* n'a pas de limite en $+\infty$, cependant $x - 1 \leq x + \sin x$ car $-1 \leq \sin x$;

or $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sin x) = +\infty$ (en appliquant a).

Théorème

Soient f et g deux fonctions telles que $|f(x)| \leq g(x)$.

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Exemple

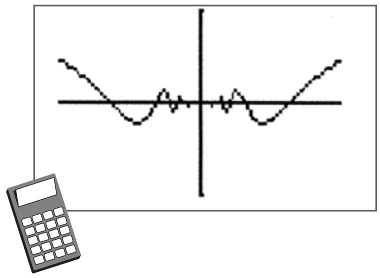
Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = x.\sin(\frac{1}{x})$ et $g(x) = |x|$.

La fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'est pas définie et n'a pas de limite en 0.

Cependant $\left|x \sin\ (\frac{1}{x})\right| \leq |x|$ car pour tout réel t, $|\sin\ t| \leq 1$. Or $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$.

D'où $\lim\limits_{x \to 0} x.\sin\ (\frac{1}{x}) = 0$ en appliquant le théorème.

Représentation graphique de f pour $-1 < x < +1$ et $-1 < y < +1$:



Théorème des gendarmes

Soient f, g et h trois fonctions telles que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$

Exemple

Calculons $\lim\limits_{x \to 0} x.E(\frac{1}{x})$ où E est la fonction partie entière.

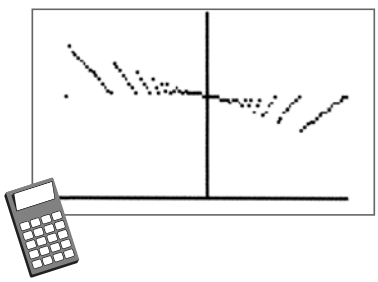
Pour tout réel on a, $t \leq E(t) \leq t+1$, et en particulier pour $t = \frac{1}{x}$:

$\frac{1}{x} \leq E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x} + 1.$

D'où pour $x > 0 : 1 \leq x.E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x+1$ et pour $x < 0 : 1 \geq x.E\left(\frac{1}{x}\right) \geq x+1.$

Or $\lim\limits_{x \to 0} 1 = \lim\limits_{x \to 0} (x+1) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} x.E\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$

Représentation de la fonction $x \mapsto x.E\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $-1 < x < +1$ et $0 < y < +1{,}8$:



Applications/Exercice 11

3B. Limite d'une composée de fonctions

Théorème

Soient u et v deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} v(x) = L$ alors

$$\lim_{x\to a} vou(x) = L.$$

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = E\left(\dfrac{x+5}{2}\right)$.

$$x \overset{u}{\mapsto} \frac{x+5}{2} = y \overset{v}{\mapsto} E(y) = E\left(\frac{x+5}{2}\right)$$

$f(x) = v\left[u(x)\right]$ avec $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+5}{2} = 3{,}5$ et $\lim\limits_{x\to 3{,}5} E(x) = 3$,

d'où $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$.

Exercices autocorrectifs

Applications

Limite finie quand x tend vers a - Limites usuelles

Exercice 1

Déterminer la limite quand x tend vers a des fonctions f définies par :

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 2$; $a = 1$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+2x+5}$; $a = 3$.

Exercice 2

Déterminer la limite quand x tend vers a des fonctions f définies par :

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 12}$; $a = -2$.

b) $f(x) = \dfrac{4}{3x-1} + \sqrt{x+1}$; $a = 7$.

Forme indéterminée $"\dfrac{0}{0}"$

Exercice 3

Déterminer la limite quand x tend vers a des fonctions f définies par :

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{4x^2-1}$; $a = 0{,}5$.

b) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9x+18}$; $a = 3$.

Limite infinie quand x tend vers a

Exercice 4

1. Déterminer la limite quand x tend vers a des fonctions f définies par :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$; $a = 0$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}$; $a = -3$.

2. Déterminer la limite à droite et à gauche quand x tend vers a des fonctions f définies par :

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^5}$; $a=0.$

b) $f(x)=\dfrac{1}{(2x-1)^7}$; $a=0{,}5.$

Exercice 5

1. Déterminer la limite quand x tend vers a des fonctions f définies par :

a) $f(x)=3-\dfrac{2}{(x+1)^4}$; $a=-1.$

b) $f(x)=\dfrac{5x^2-3}{x^2}$; $a=0.$

2. Déterminer la limite à droite et à gauche quand x tend vers a des fonctions f définies par :

a) $f(x)=3x+5-\dfrac{2}{x}$; $a=0.$

b) $f(x)=\dfrac{-9}{(x+3)^7}$; $a=-3.$

Exercice 6

1. Déterminer la limite quand x tend vers *0* de la fonction f définie par :

$$f(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2x^4}.$$

2. Déterminer la limite à droite et à gauche quand x tend vers -1 de la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^3}.$$

Limite finie en -∞ et en +∞

Exercice 7

Déterminer la limite en -∞ et en +∞ des fonctions f définies par :

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^5}$ **b)** $f(x)=\dfrac{-7}{x^8}$ **c)** $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x^2}.$

Limite infinie en $-\infty$ et en $+\infty$

Exercice 8

Déterminer la limite quand x tend vers $-\infty$ puis quand x tend vers $+\infty$ des fonctions f définies par :

a) $f(x) = -7x^3$; **b)** $f(x) = 5x^4$; **c)** $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{x^5}$; **d)** $f(x) = x^3 - 10x$.

Comportement des polynômes à l'infini

Exercice 9

1. Déterminer la limite quand x tend vers $-\infty$ puis quand x tend vers $+\infty$ des fonctions f définies par

a) $f(x) = -x^3 + x$; **b)** $f(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 10$.

2. Observer leur représentation graphique sur une calculatrice.

Comportement des fonctions rationnelles à l'infini

Exercice 10

Déterminer la limite quand x tend vers $-\infty$ puis quand x tend vers $+\infty$ des fonctions f définies par :

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 9x^2}{x^2 + 3}$; b) $f(x) = \dfrac{-2x^4 + 1}{x^2 + 2x}$

c) $f(x) = \dfrac{-x^3 + 3x + 1}{2x^3 + 5x}$; d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{-5x^3 + 4}$.

Théorème des gendarmes

Exercice 11

Soit E la fonction partie entière.

1. Montrer que pour $x > 0 : 1 \leq \dfrac{E(x+1)}{x} \leq \dfrac{x+1}{x}$.

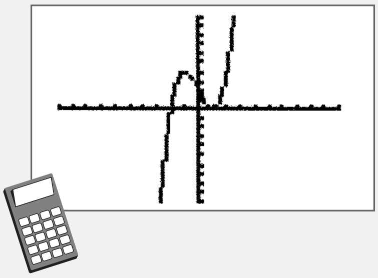
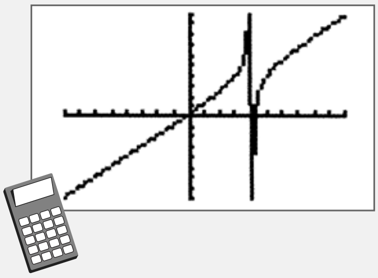
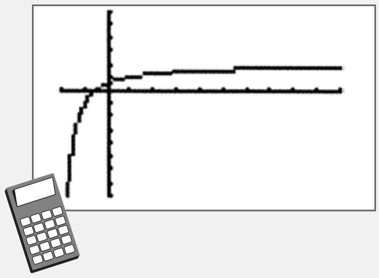
2. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{E(x+1)}{x}$.

Approfondissements

Limites et interprétations graphiques

Exercice 12

À l'aide des représentations graphiques ci-dessous déterminer la limite de f aux bornes de son domaine de définition.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$; **b)** $f(x) = x - \dfrac{1}{x - 4}$; **c)** $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 2} (x > -2)$.

Exercice 13

À l'aide d'une calculatrice graphique, donner sans calcul la limite des fonctions f définies ci-dessous quand x tend vers 0, quand x tend vers $-\infty$ et quand x tend vers $+\infty$, on utilisera au choix la lecture du graphique, la fonction TRACE ou les tableaux de valeurs de *f(x)* de la calculatrice.

a) $f(x) = \dfrac{-x^2 + 1}{x - 4}$; **b)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x + 1}$.

Limite d'une fonction quand *x* tend vers a

Exercice 14

Déterminer la limite en a de f définie par :

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x^2 - x - 6}$; $a = -3$; **d)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$; $a = 9$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x^2 - x - 6}$; $a = 2$; **e)** $f(x) = \dfrac{x + 3}{|x - 1|}$; $a = 1$.

c) $f(x) = \dfrac{-2x + 3}{(2x - 1)^2}$; $a = \dfrac{1}{2}$.

Limite quand x tend vers **+∞ ou quand** x tend vers -∞

Exercice 15

Déterminer la limite quand x tend vers +∞ puis quand x tend vers -∞ des fonctions f définies par :

a) $f(x) = -7x^3 + 2x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x^2 - x - 6}$

c) $f(x) = -\ (x+1)\sqrt{3x^2 + 5}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)$

e) $f(x) = \dfrac{x + 3}{|x - 1|}$.

Dérivées et primitives

Séquence 3

➤ Prérequis

- Généralités sur les fonctions
- Notions sur les limites

➤ Objectifs

- Consolidation et approfondissement des acquis des classes antérieures sur les dérivées et les primitives

➤ Contenu

1. Dérivées

1A. Le nombre dérivé

On considère la fonction f définie sur un intervalle ouvert I contenant le réel a.

Soit C la représentation graphique de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Définition

La fonction f est dite **dérivable** en a s'il existe un réel A et une fonction φ tels que :

$$f(a+h) = f(a) + A.h + h.\varphi(h) \text{ avec } \lim_{0} \varphi = 0$$

Le réel A est appelé le **nombre dérivé** de f en a et on le note $f'(a)$ (lire « f prime en a »).

Exemple

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = -x^2 + 4x$. En $a = 1$, par exemple, on a $f(1) = 3$.

$f(1+h) = -(1+h)^2 + 4(1+h) = -1 - 2h - h^2 + 4 + 4h$

$f(1+h) = 3 + 2h - h^2$.

On a donc

$f(1+h) = f(1) + 2.h + h.\varphi(h)$ en posant $\varphi(h) = -h$ (qui vérifie bien $\lim_{0} \varphi = 0$).

La fonction f est **dérivable** en $a = 1$ et $f'(a) = 2$.

Définition équivalente

On appelle **nombre dérivé** de la fonction f en a et l'on note $f'(a)$ le réel

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

La fonction f est alors dite **dérivable** en a.

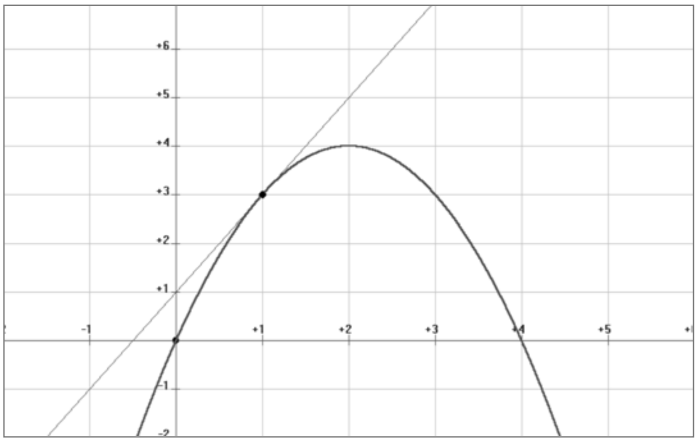
Applications/Exercice 1

Remarque

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente T à C au point d'abscisse a. Lorsque cela est possible, $f'(a)$ se lit sur la représentation graphique C de f, comme pour l'exemple ci-dessous.

Exemple

Soit C la parabole représentant la fonction f définie sur **R** par $f(x) = -x^2 + 4x$.



La tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 passe par les points A(1 ; 3) et B(2 ; 5), le coefficient directeur de cette tangente a pour valeur :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = +2. \text{ On a donc } f'(1) = +2.$$

En appliquant la définiton :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{-(1+h)^2+4(1+h)-3}{h}$$

$$= \frac{-1-2h-h^2+4+4h-3}{h} = \frac{2h-h^2}{h} = \frac{h(2-h)}{h} = 2-h$$

d'où $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2-h) = 2.$

Applications/Exercice 2

Propriété

La tangente (T) à (C) au point A(a ; $f(a)$) a pour équation $y - f(a) = f'(a).(x-a)$.

En effet, par définition de $f'(a)$, l'équation de (T) est de la forme $y = f'(a).x + b$, or A (a ; $f(a)$) $\in$ (T), donc $f(a) = f'(a).a + b$ d'où la valeur de b et le résultat.

Exemple

Soit T la tangente au point d'abscisse $a = 1$ à la parabole C représentant la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 4x$, on aura :

$$y - f(1) = f'(1).(x - 1) \text{ c'est-à-dire } y - 3 = 2.(x - 1), \text{ d'où}$$

$$T : y = 2x + 1.$$

Applications/Exercice 3

1B. La fonction dérivée

Définition

On appelle **fonction dérivée**, de la fonction f, et l'on note f' (lire « f prime») la fonction qui à un réel donné associe son nombre dérivé en a.

$$f' : a \mapsto f'(a)$$

Si le réel $f'(x)$ peut être calculé pour tout réel $x \in$ I, on dira que ***f*** **est dérivable sur l'intervalle I**.

Il ne reste qu'à connaître les fonctions dérivées de fonctions usuelles, et les techniques de calcul lorsque l'on compose ces dernières entre elles. Les résultats des deux tableaux ci-dessous doivent donc être connus et appris par cœur :

Tableau 1 : dérivées usuelles

a, b, c et $d \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ et $\alpha \in \mathbf{R} - \{1\}$

Fonctions	**Fonctions dérivées**
$x \mapsto a$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto ax + b$	$x \mapsto a$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbf{N})$	$x \mapsto n.x^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x} \ (x \neq 0)$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \mapsto \sqrt{x} \ (x > 0)$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} (x \neq -\frac{d}{c})$	$x \mapsto \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$
$x \mapsto x^{\alpha} \ (\alpha \in \mathbf{R}) \ (x > 0)$	$x \mapsto \alpha.x^{\alpha - 1}$

On note de façon plus pratique dans les calculs :

$(a)' = 0$; $(ax + b)' = a$; $(x^2)' = 2x$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$; $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$; $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

Exemples

a) $(-3x-4)' = -3$

b) $(x^5)' = 5x^4$

c) $\left(\dfrac{2x+3}{5x-1}\right)' = \dfrac{2.(-1)-5.3}{(5x-1)^2} = \dfrac{-17}{(5x-1)^2}$

Tableau 2 : opérations usuelles

u et v désignent deux fonctions dérivables, $a \in$ **R** et $n \in$ **N*** $-\{1\}$

Fonctions	Fonctions dérivées
$u + v$	$u' + v'$
$a . u$	$a . u'$
$u . v$	$u'.v + u.v'$
$\dfrac{1}{v}$ $(v \neq 0)$	$\dfrac{-v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}$ $(v \neq 0)$	$\dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$
u^n	$n.u^{n-1}.u'$
$\sqrt{u}$ $(u > 0)$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

On note de façon plus pratique dans les calculs :

$(u+v)' = u' + v'$; $(a.u)' = a.u'$; $(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$; $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$; $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$; $(u^n)' = nu^{n-1}.u'$

Exemples

a) $(x^5 - 2x^3 + 7)' = 5x^4 - 6x^2$

b) $\left(\dfrac{1}{x^2 + 3x + 11}\right)' = -\dfrac{2x+3}{\left(x^2 + 3x + 11\right)^2}$

c) $((5x^2 + 2)^4)' \;=\; 4.(5x^2 + 2)^3.(5x^2 + 2)'$

$= \; 4.(5x^2 + 2)^3.(10x) \;=\; 40x.(5x^2 + 2)^3$

Théorème

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I alors : $(\,f\,(ax + b)\,)' = a.f'\,(ax + b)$.

Exemple

Si f est une fonction dérivable sur **R** : $(\,f\,(5x - 7)\,)' = 5.f\,'(5x - 7)$.

Applications/Exercice 4

2. Primitives

2A. Définition

Définition

Soient f et F deux fonctions de **R** vers **R** définies sur un intervalle I. On dira que F est une primitive de f sur I si :

a) F est dérivable sur I,

b) pour tout $x \in$ I, $F'(x) = f\,(x)$.

Exemple

Sur **R**, soient $f : x \mapsto f(x) = 2x - 3$ et $F : x \mapsto x^2 - 3x + 5$.

$F'\,(x) = (x^2 - 3x + 5)' = 2x - 3 = f(x)$ donc F est une primitive de f sur **R**.

Théorème

Si f admet une primitive F sur I alors :

• f admet une infinité de primitives sur I,

• Toutes les primitives de f sont de la forme F + *constante*,

(où *la constante* est un réel arbitrairement choisi).

En effet, soit F une primitive de f sur I. Pour que $G = F +$ *constante* prenne en $x = a$ la valeur b il faut que $G(a) = F(a) +$ *constante* $= b$, d'où *constante* $= b - F(a)$, et la constante est déterminée de façon unique.

2B. Primitives des fonctions usuelles

Si $a \in \mathbf{R}^\star$, $n \in \mathbf{N}^\star$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ -{1} alors on a :

Fonctions	Primitives
$x \mapsto a$	$x \mapsto ax + cte$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbf{N})$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + cte$
$x \mapsto x^\alpha \ (x>0)$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte$
$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ (x>0)$	$x \mapsto \sqrt{x} + cte$

2C. Opérations usuelles sur les primitives

Si u et v, fonctions de la variable réelle x, admettent pour primitives respectives U et V sur l'intervalle I, on déduit des opérations relatives à la dérivation des fonctions les résultats suivants pour $k \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$:

Fonctions	Primitives
$u + v$	$U + V + \text{cte}$
$k.u$	$k.U + \text{cte}$
$u^n.u'$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + \text{cte}$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u} + \text{cte}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + \text{cte}$

C'est-à-dire, si u et v admettent pour primitives respectives U et V, alors $u + v$ admet pour primitives $U + V$ + constante; et si $k \in \mathbf{R}$, $k.f$ admet pour primitive $k.F$ + constante ; etc.

Exemple

Soit g la fonction définie sur **R** par $g(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

Si l'on pose $u : x \mapsto u(x) = 1 + x^2$ on aura $g(x) = \dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$.

g admet donc pour primitive sur **R** la fonction G définie par :

$G(x) = -\dfrac{1}{u(x)} + cte = -\dfrac{1}{1+x^2} + cte.$

Applications/Exercice 5

Théorème

Si g est une fonction dérivable sur l'intervalle I, de dérivée g', alors la fonction $g'(ax+b)$ admet pour primitive $x \mapsto \dfrac{1}{a}.g(ax+b)$ sur I.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = (5x-1)^3$. On note F une primitive de f.

On a $f(x) = g'(5x-1)$ avec $g'(x) = x^3$ et $g(x) = \dfrac{1}{4}x^4$.

D'où $F(x) = \dfrac{1}{5}g(5x-1) = \dfrac{1}{20}(5x-1)^4$.

La fonction $x \mapsto (5x-1)^3$ admet pour primitive $x \mapsto \dfrac{1}{20}.(5x-1)^4$ sur I.

Applications/Exercice 6

Théorème

Parmi toutes les primitives de f il n'en existe **qu'une seule** qui prenne en $x = a$ donné une valeur b donnée.

L'unique primitive de f qui prend en $x = a$ la valeur b est $x \mapsto F(x) - F(a) + b$.

Théorème

Toute fonction dérivable sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ admet au moins une primitive sur cet intervalle.

Applications/Exercice 7

Définition

On appelle fonction logarithme népérien et l'on note ln **l'unique primitive** s'annulant pour $x = 1$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.

La fonction logarithme népérien est donc définie par : $\begin{cases} (ln\ x)' = \frac{1}{x} \\ ln\ 1 = 0 \end{cases}$

3. Applications des dérivées

3A. Tangentes

Propriété (rappel)

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit C la courbe d'équation $y = f(x)$.
La tangente T à C au point d'abscisse $x = a$ admet pour équation :

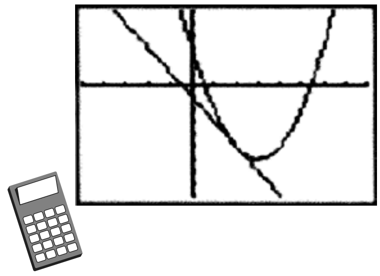
$$y - f(a) = f'(a)\ (x - a).$$

Exemple

Soit C la parabole d'équation $y = x^2 - 6x + 3$. Déterminons l'équation de la tangente T à C en $a = 2$. Si l'on pose $f(x) = x^2 - 6x + 3$, alors $f'(x) = 2x - 6$,

$$\text{d'où } \begin{cases} f(2) = 2^2 - 6(2) + 3 = -5. \\ f'(2) = 2(2) - 6 = -2 \end{cases}$$

La tangente T à C en $a = 2$ a pour équation : $y - (-5) = -2.(x - 2)$ c'est-à-dire T : $y = -2x - 1$



Applications/Exercice 8

3B. Variations des fonctions

L'étude des variations des fonctions est basée sur le **théorème fondamental** ci-dessous :

Théorème

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I

f croissante sur I	équivaut à	pour tout $x \in$ I : $f'(x) \geq 0$
f décroissante sur I	équivaut à	pour tout $x \in$ I : $f'(x) \leq 0$
f constante sur I	équivaut à	pour tout $x \in$ I : $f'(x) = 0$

Exemple

Étudions les variations de la fonction f définie sur l'intervalle [-10 ; 10], par :

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3.$$

f est définie et dérivable sur [-10 ; 10], de dérivée $f'(x) = -x^2 + 4x = -x(x - 4)$.

$f'(x) \geq 0$ équivaut à $x \in [0 ; 4]$.

Variations de *f* :

Si $x \in [0 ; 4]$ alors $f'(x) \geq 0$, donc f est croissante.

Si $x \in [-10 ; 0] \cup [4 ; 10]$ alors $f'(x) \leq 0$, donc f est décroissante.

Tableau de variations de *f*

x	-10		0		4		10
$f'(x)$	-140	$-$	0	$+$	0	$-$	-60
$f(x)$	$\frac{1591}{3}$	↘	-3	↗	$\frac{23}{3}$	↘	$-\frac{409}{3}$

Applications/Exercice 9

Théorème

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Si pour tout $x \in$ I, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

Si pour tout $x \in$ I, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.

Remarques

1. Les réciproques ne sont pas vraies. On a cependant :
f est strictement croissante $\Leftrightarrow f'(x) > 0$, sauf éventuellement pour des valeurs isolées de x.
f est strictement décroissante $\Leftrightarrow f'(x) < 0$, sauf éventuellement pour des valeurs isolées de x.
Par exemple, la fonction f définie sur **R** par $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur **R** et $f'(x) > 0$ sauf pour la valeur isolée $x = 0$.

2. On notera en conséquence que :

Si $f'(x) > 0$ sur $]\ a\ ;\ b\ [$ (intervalle ouvert) alors f est strictement croissante sur $[\ a\ ;\ b\ ]$ (fermé).

Si $f'(x) < 0$ sur $]\ a\ ;\ b\ [$ (intervalle ouvert) alors f est strictement décroissante sur $[\ a\ ;\ b\ ]$ (fermé).

Exemple

$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3.$

Sur $\mathbf{R}$: $f'(x) = -x^2 + 4x = -x(x-4).$

$f'(x) > 0$ sur $]0;4[$ donc f est strictement croissante sur $[0 ; 4]$;

$f'(x) < 0$ sur $]-\infty ; 0[\cup]4 ; +\infty[$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0] \cup [4 ; +\infty[$.

3C. Extremums des fonctions

Définition - Extremums absolus de f

Soit f une fonction définie sur un intervalle D.

On dira que f admet un maximum absolu en x_0 égal à $f(x_0)$ si pour tout $x \in$ D : $f(x) \leq f(x_0)$, (c'est-à-dire f ne dépasse jamais la valeur $f(x_0)$ sur tout l'intervalle D).

On dira que f admet un minimum absolu en x_0 égal à $f(x_0)$ si pour tout $x \in$ D : $f(x) \geq f(x_0)$, (c'est-à-dire f ne prend pas de valeur au-dessous de $f(x_0)$ sur tout l'intervalle D).

Un maximum ou un minimum de f s'appelle un extremum de f.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$. Pour tout x : $f(x) \geq -3$ c'est-à-dire $f(x) \geq f(0)$. En $x_0 = 0$, f admet pour minimum absolu $f(0) = -3$.

Définition - Extremums relatifs de f

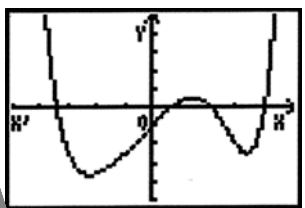
Soit f une fonction définie sur un intervalle D.

On dira que f admet un maximum relatif en x_0 égal à $f(x_0)$ s'il existe un intervalle ouvert I tel que pour tout $x \in$ D $\cap$ I on ait $f(x) \leq f(x_0)$, (c'est-à-dire f ne dépasse jamais la valeur $f(x_0)$ sur D$\cap$I).

On dira que f admet un minimum relatif en x_0 égal à $f(x_0)$ si pour tout $x \in$ D, $f(x) \geq f(x_0)$, (c'est-à-dire f ne prend pas de valeur au-dessous de $f(x_0)$ sur D$\cap$I).

Exemple

La fonction représentée ci-dessous admet 3 extremums : 2 minimums (un absolu et un relatif) et un maximum (relatif).



Dans le cas des fonctions dérivables, on peut très aisément caractériser les extremums (absolus ou relatifs) à l'aide du théorème suivant :

Théorème

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle D. f admet un extremum en x_0 égal à $f(x_0)$ si et seulement si :

$$f'(x_0) = 0 \text{ et } f' \text{ change de signe en } x_0$$

Exemple

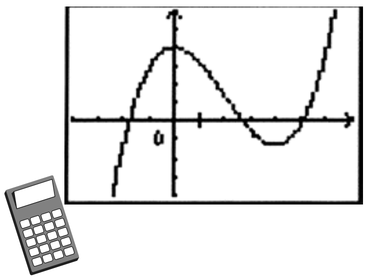
Soit f définie sur **R** par $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 4$.

On a $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x = \frac{1}{2}x(x-4)$

f' s'annule et change de signe en $x_0 = 0$ et

f admet deux extremums : en $x_0 = 0$ égal à $f(0) = 4$

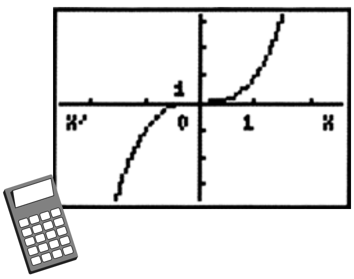
en $x_0 = 4$ égal à $f(4) = -\frac{4}{3}$.



Remarque

Les deux conditions du théorème précédent **doivent être vérifiées.** En effet :

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = x^3$. On a $f'(x) = 3x^2$. Pour $x_0 = 0$, on a bien $f'(0) = 0$ mais f' ne change de signe en $x_0 = 0$. F n'admet pas d'extremum en x_0.



Applications/Exercice 10

3D. Bijections strictement monotones

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Si f est dérivable et strictement croissante sur I = [a ; b] alors f est bijective de [a ; b] sur [$f(a)$; $f(b)$].

Exemple

Soit f la fonction définie sur [-1 ; +2] par $f(x) = 2x^3 + 2x$. On a $f'(x) = 6x^2 + 2$, c'est-à-dire $f'(x) > 0$. Par ailleurs [f (-1) ; f (+2)] = [-4 ; 20].

Conclusion : f est une bijection de [-1 ; +2] sur [-4 ; 20].

Applications/Exercice 11

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Si f est dérivable et strictement <u>dé</u>croissante sur I = [a ; b] alors f est bijective de [a ; b] sur [$f(b)$; $f(a)$].

Exemple

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +4]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

On a $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$, c'est-à-dire $f'(x) < 0$

Par ailleurs $[f(4)\ ;\ f(0)] = \left[\dfrac{1}{5}\ ;\ 1\right]$.

Conclusion : f est une bijection de $[0\ ;\ +4]$ sur $\left[\dfrac{1}{5}\ ;\ 1\right]$.

Applications/Exercice 12

Remarque

Les théorèmes précédents se généralisent aux cas où I est un intervalle ouvert] a ; b [avec f bijective de] a ; b [sur] $f(a)$; $f(b)$ [ou sur] $f(b)$; $f(a)$ [respectivement ; ou même aux intervalles de type] - ∞ ; + ∞ [.

Exemple

Soit f la fonction définie sur]- ∞ ; + ∞[par $f(x) = x^3 + x + 1$. On a $f'(x) = 3x^2 + 1$, c'est-à-dire $f'(x) > 0$. f est une bijection strictement croissante.

Par ailleurs $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Conclusion : f est une bijection (strictement croissante) de]- ∞ ; + ∞[sur]- ∞ ; + ∞[.

Applications/Exercice 13

Exercices autocorrectifs

Applications

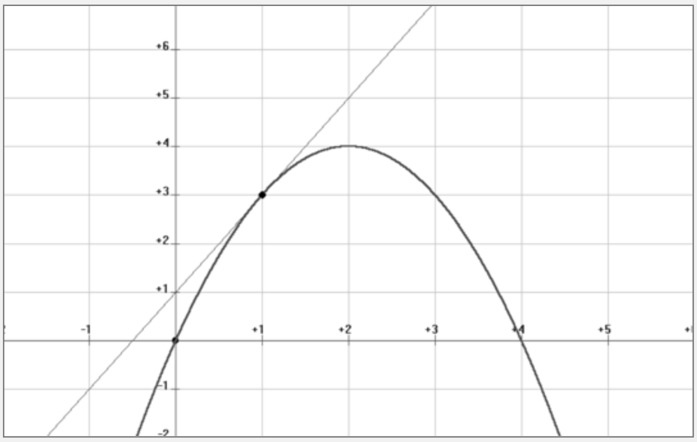
Définition du nombre dérivé

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = -x^2 + 4x$. En appliquant la définition, déterminer $f'(2)$.

Exercice 2

Soit C la parabole représentant la fonction f définie sur **R** par $f(x) = -x^2 + 4x$.



Déterminer $f'(1)$:

a) en appliquant la définition ;
b) par simple lecture graphique.

Nombre dérivé et équation de la tangente

Exercice 3

À l'aide des nombres dérivés des exercices 1 et 2, déterminer l'équation des tangentes (T_1) et (T_2) à la parabole C d'équation $y = -x^2 + 4x$ respectivement aux points d'abscisses $a = 1$ et $a = 2$.

Fonctions dérivées

Exercice 4

Déterminer les fonctions dérivées *f'* des fonctions *f* définies par les expressions ci-dessous :

a) $f(x) = -\frac{5}{4}x^4 + 3x^3 - x + 5$; **b)** $f(x) = \frac{1}{x^2 + 8x + 13}$

c) $f(x) = \frac{x^2 + 5}{7x^2 + 3}$; **d)** $f(x) = \frac{1}{10}(5x^3 + 2)^2$

e) $f(x) = \left(\frac{-2x - 5}{x + 3}\right)^2$; **f)** $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$.

Primitives

Exercice 5

Déterminer, sur les intervalles I indiqués, les primitives *F* des fonctions *f* définies par :

a) $f(x) = x^2 + 3x - 1$, $\mathrm{I} = \mathbf{R}$; **b)** $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$, $\mathrm{I} = \mathbf{R}^\star$

c) $f(x) = (x - 3)^2$, $\mathrm{I} = \mathbf{R}$; **d)** $f(x) = 3(3x - 1)^3$, $\mathrm{I} = \mathbf{R}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$; **f)** $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$, $\mathrm{I} =]3\,;+\infty[$.

Exercice 6

Déterminer, sur les intervalles I indiqués, les primitives *F* des fonctions *f* définies par :

a) $f(x) = (5 - 2x)^2$, $\mathrm{I} = \mathbf{R}$; **b)** $f(x) = \frac{1}{(5 - 2x)^2}$, $I = \left]\frac{5}{2}\,;\,\infty\right[$.

Exercice 7

Déterminer l'unique primitive F_1 de *f* vérifiant la condition donnée.

a) $f(x) = 2x - 3$ et $F_1(1) = 0$; **b)** $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ et $F_1(2) = 3$.

Fonction dérivée et équation de la tangente

Exercice 8

Soit C la courbe d'équation $y = x^3 - 3x + 2$. Déterminer l'équation de la tangente T_1 à C au point d'abscisse $a = 0$.

Variations

Exercice 9

1. Étudier les variations des fonctions définies sur **R** par :

$$\textbf{a)}\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1 \quad ; \quad \textbf{b)}\ g(x) = (x-2)^3(x+1).$$

2. Donner le tableau des variations de *f* et de *g*.

Extremums

Exercice 10

À l'aide des résultats de l'exercice 9, indiquer les extremums des fonctions *f* et *g* définies par :

$$\textbf{a)}\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1 \quad ; \quad \textbf{b)}\ g(x) = (x-2)^3(x+1).$$

En quels points est-ce que ces valeurs sont atteintes ?

Bijections strictement monotones

Exercice 11

Montrer que la fonction *f* définie sur [-10 ; +10] par $f(x) = 3x + 2$ est une bijection (strictement croissante) de [-10 ; +10] sur [-28 ; +32].

Exercice 12

Montrer que la fonction *f* définie sur [0 ; +3] par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est une bijection (strictement décroissante) de [0 ; +3] sur [0,1 ; +1].

Exercice 13

Montrer que la fonction *f* définie sur **R** par $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ est une bijection (strictement croissante) de **R** sur **R**.

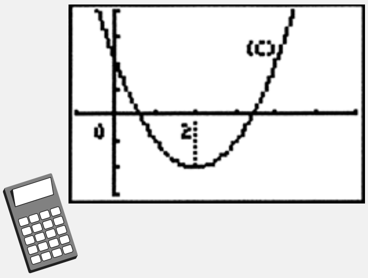
Approfondissements

Extremums

Exercice 14

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la parabole (P) d'équation $y = ax^2 + bx + c$ représentant la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Déterminer la valeur des réels *a, b* et *c* (c'est-à-dire retrouver l'équation de la parabole) sachant que (P) passe par le point A(0 ; 2) et admet le point S(2 ; -2) pour sommet.



Primitives

Exercice 15

Sur les intervalles I indiqués, déterminer **l'unique primitive** *F* s'annulant pour $x = 1$ des fonctions *f* définies par :

a) $f(x) = x^2 + 3x - 1$, I = **R** ; **b)** $f(x) = -6x(-3x^2 + 2)^2$, I = **R** ;

c) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{(x^2 - x - 2)^2}$, $I =]2 ; +\infty[$.

Exercice 16

Déterminer sur $]0 ; +\infty[$ l'unique primitive *F* de la fonction *f* telle que $F(1) = 0$, sachant que :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exercice 17

Montrer que la fonction *F* définie par $F(x) = x.\ln(x) - x$ est une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction *f* définie par $f(x) = \ln(x)$.

Bijections strictement monotones

Exercice 18 *(BTS Info de Gestion 1999 - Partiel)*

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x$.

1. a) Étudier le sens de variation de g.

b) Dresser le tableau de variation de g (on ne demande pas les limites aux bornes du domaine de définition).

2. a) Calculer $g\ (0{,}5)$ et $g\ (1)$.

b) Démontrer que l'équation $g\ (x) = 0$ admet une solution unique appartenant à $[\ 0{,}5\ ;\ 1\ ]$, que l'on notera α. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

3. Déduire des questions précédentes le signe de $g\ (x)$.

Travaux pratiques

TP - Coût marginal - Coût moyen

Une entreprise fabrique des quantités q de produits, et l'on note $C(q)$ le coût occasionné par la fabrication de la quantité q de ce produit.

On appelle **coût marginal** de rang q, l'accroissement de coût occasionné par la fabrication de la q-ième quantité de ce produit : $C\ (q) - C\ (q\text{-}1)$.

$C\ (q) - C\ (q\text{-}1)$ représente également le taux d'accroissement de C entre q-1 *et* q :

$$\frac{C(q) - C(q-1)}{q-(q-1)}$$

On considère alors que : $\dfrac{C(q) - C(q-1)}{q-(q-1)} \approx C'(q)$.

On appelle **fonction coût marginal** la fonction C_m définie pour $q \geq 0$.par :

$$C_m\,(q) = C'\,(q).$$

On appelle **coût moyen** la fonction notée C_M *définie* pour $q > 0$ *par* $C_M\,(q) = \dfrac{C(q)}{q}$

c'est-à-dire le coût de fabrication par unités produites. Nous allons vérifier sur des exemples, puis de façon générale, la proposition :

« si le coût moyen est minimal, alors le coût marginal est égal au coût moyen ».

1. Dans une entreprise, le coût total de fabrication d'une quantité q variant entre 0 et 500 est donnée, en euro, par $C\ (q) = 6\ q^2 + 150\ q + 600$.

a) Déterminer la fonction coût marginal C_m et étudier son signe pour $q \in [0\ ;\ 500]$. Déterminer le coût moyen C_M.

b) Dresser le tableau de variation de C.

c) Vérifier que le coût marginal est égal au coût moyen lorsque ce dernier est minimal.

d) Représenter dans un même repère les fonctions C_m et C_M .

2. Pour un second produit, le coût marginal C_m est donné par $C_m\ (q) = 3\ q^2 + 100$.

a) Déterminer le coût $C\ (q)$ de fabrication de la quantité q de ce produit, sachant qu'en raison des charges fixes $C\ (0) = 250\ 000$.

b) Vérifier que le coût marginal est égal au coût moyen lorsque ce dernier est minimal.

3. Pour $q > 0$, on note $C(q)$ le coût total de fabrication d'une quantité q.

a) Économiquement, peut-on envisager que $C'\ (q) \leq 0$?

b) Calculer la dérivée de $C\ (q) = q.\ C_M\ (q)$

c) Si a est la quantité qui minimise C_M
calculer $C'_M\ (a)$ puis déduire du b) que $C_M\ (a) = C'\ (a)$.

d) Réciproquement, si a est la quantité telle que $C_M\ (a) = C'(a)$. Montrer que $C'_M\ (a) = 0$.

Comportements asymptotiques

Séquence 4

➤ Prérequis

- Généralités sur les fonctions
- Notions sur les limites

➤ Objectifs

- Consolidation et approfondissement des acquis des classes antérieures sur les branches infinies et les asymptotes

➤ Contenu

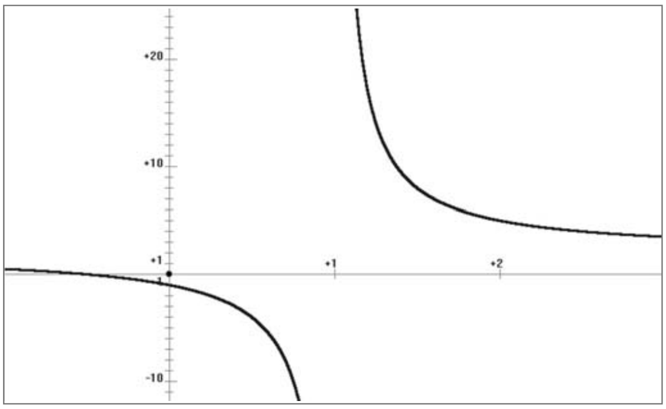
1. Branches infinies

Définition

Soient (C) la représentation graphique d'une fonction dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$,
et M (x, y) un point de (C). On dira que (C) **admet une branche infinie** si l'une au moins des coordonnées de M peut prendre des valeurs infiniement grandes.

Exemple

Soit (C) la courbe d'équation $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ et dont la représentation dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est donnée ci-dessous :



(C) admet quatre branches infinies : en - ∞, en 1^+, en 1^- et en + ∞.

Soit (C) la courbe représentant la fonction f : (C) admet une branche infinie si l'une au moins des propriétés suivantes est vérifiée par f :

a) $\lim\limits_{-\infty} f = a$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = a$ (*Cf*. 2*A*. *Asymptotes horizontales*)

b) $\lim\limits_{b} |f| = +\infty$, $\lim\limits_{b^-} |f| = +\infty$ ou $\lim\limits_{b^+} |f| = +\infty$ (*Cf*. 2*B*. *Asymptotes verticales*)

c) $\lim\limits_{-\infty} |f| = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} |f| = +\infty$

Applications/Exercices 1 et 2

2. Droites asymptotes à une courbe

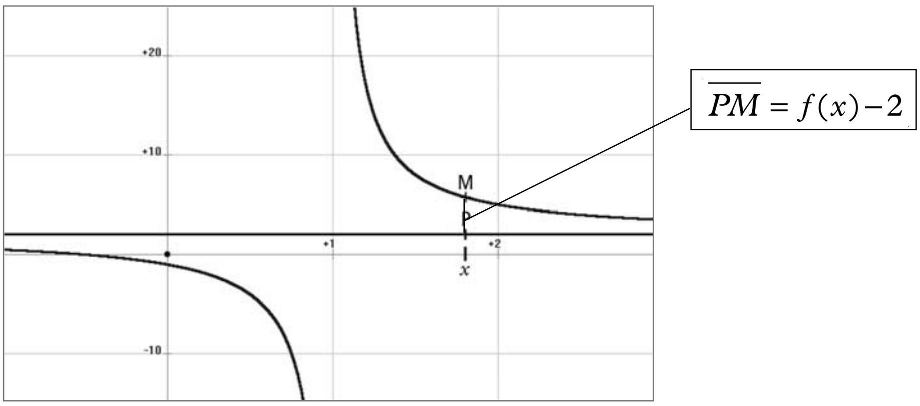
2A. Asymptote horizontale

Définition - Asymptote horizontale

On dira que la droite (Δ) d'équation $y = a$ est une asymptote horizontale de la courbe (C) en $-\infty$ ou en $+\infty$ respectivement si $\lim\limits_{-\infty} f = a$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = a$.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$, (C) sa représentation dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et (Δ) la droite d'équation $y = 2$.



Pour x donné ($x > 1$), considérons les points M(x ; $f(x)$) ∈ (C) et P(x ; 2) ∈ (Δ) : $f(x) - 2$ mesure alors l'écart entre (C) et (Δ).

D' une part $f(x) - 2 = \dfrac{3}{x-1} \# 0$ donc (C) ne coupe pas (Δ).

D' autre part $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - 2\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3}{x-1}\right) = 0$, c'est-à-dire plus x est grand et plus (C) se rapproche de (D).

On fait le même raisonnement en $-\infty$.

Applications/Exercice 3

2B. Asymptote verticale

Définition - Asymptote verticale

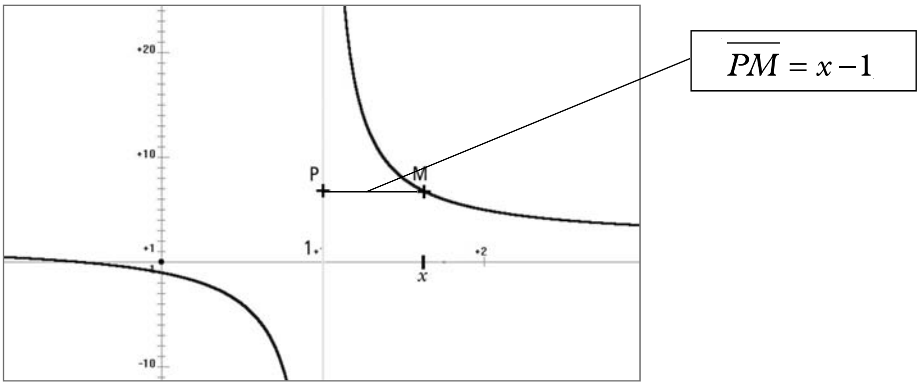
On dira que la droite (Δ) d'équation $x = b$ est une asymptote verticale de la courbe (C) si

$$\lim_{b} |f| = +\infty \text{ ou } \lim_{b^-} |f| = +\infty \text{ ou } \lim_{b^+} |f| = +\infty.$$

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

(C) Sa représentation dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (Δ) la droite d'équation $x = 1$.



Pour x donné ($x > 1$), on considère les points $M(x\ ;\ f(x)) \in$ (C) et $P(1\ ;\ f(x)) \in$ (Δ) : $x - 1$ mesure alors l'écart entre (C) et (Δ).

D'une part $x - 1 \neq 0$ car $1 \notin D_f$, donc (C) ne coupe pas (Δ).

D'autre part $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x-1) = 0,$ c'est-à-dire plus x est proche de 1 et plus (C) se rapproche de (Δ), sans couper cette dernière.

On fait le même raisonnement pour $x < 1$.

Applications/Exercice 4

2C. Asymptote oblique

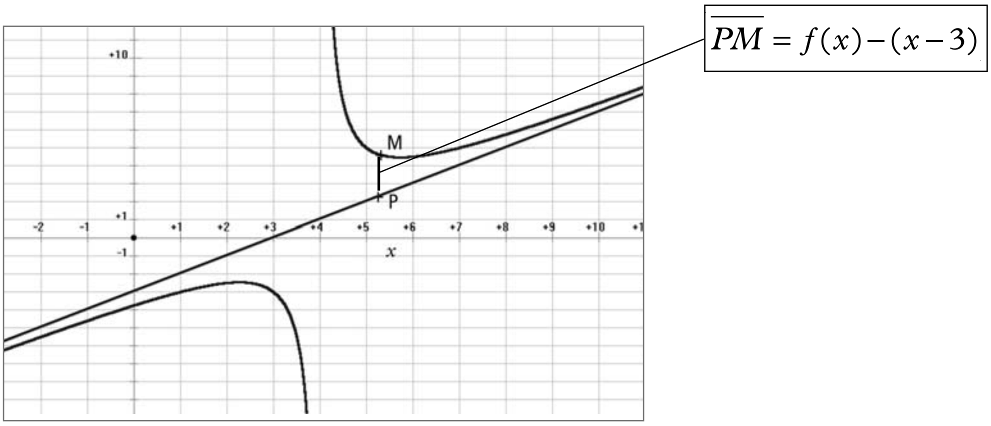
Définition - Asymptote oblique

On dira que la droite (Δ) d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe (C) d'équation $y = f(x)$ respectivement en $-\infty$ ou en $+\infty$ si :

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0 \text{ ou } \lim_{x\to+\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0.$$

Exemple

Soient f la fonction définie par $f(x) = x - 3 + \dfrac{3}{x-4}$, (C) sa représentation dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (Δ) la droite d'équation $y = x - 3$.



Pour x donné, $x \neq 4$, considérons les points M(x ; $f(x)$) ∈ (C) et P(x ; $x - 3$) ∈ (Δ) : $f(x) - (x - 3)$ mesure alors l'écart entre (C) et (Δ).

D' une part $f(x)-(x-3) = \dfrac{3}{x-4} \neq 0$ donc (C) ne coupe pas (Δ).

D' autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x-3)\big) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x-4}\right) = 0$, c'est à dire plus x est grand et plus (C) se rapproche de (Δ).

On fait le même raisonnement en $-\infty$.

Applications/Exercice 5

2D. Position relative d'une courbe et de son asymptote

Propriété

La position de la courbe (C) : $y = f(x)$ par rapport à son asymptote (Δ) : $y = ax + b$ est donnée par le signe de $f(x) - (ax + b)$.

En effet, si $f(x) - (ax + b) > 0$ alors $f(x) > ax + b$, et (C) sera au-dessus de (Δ).

Par ailleurs, si $f(x) - (ax + b) < 0$ alors $f(x) < ax + b$, et (C) sera en-dessous de (Δ).

Exemple

Soit f définie sur $\mathbf{R} - \{4\}$ par $f(x) = x - 3 + \dfrac{3}{x-4}$

$f(x) = x - 3 + \dfrac{3}{x-4}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - (x-3)\right] = 0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - (x-3)\right] = 0$.

La position relative de (C) et de (Δ) est donnée par le signe de :

$f(x) - (x-3) = \dfrac{3}{x-4}$.

D'où :

si $x < 4$ alors $f(x) - (x - 3) < 0$, et (C) est en-dessous de (Δ).

si $x > 4$ alors $f(x) - (x - 3) > 0$, et (C) est au-dessus de (Δ).

Remarque

Pour f définie par $f(x) = x - 3 + \dfrac{3}{x-4}$.

Par réduction au même dénominateur on obtient $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 15}{x-4}$.

La décomposition de $f(x)$ sous la forme $f(x) = x - 3 + \dfrac{3}{x-4}$

fait cependant mieux apparaître la droite (Δ) : $y = x - 3$ comme asymptote oblique à la courbe en $-\infty$ ou en $+\infty$.

Applications/Exercice 6

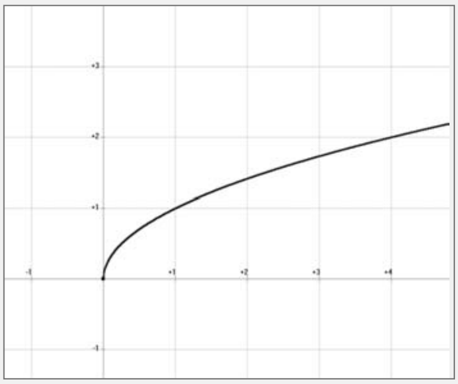
8 2930 TG PA 01

Exercices autocorrectifs

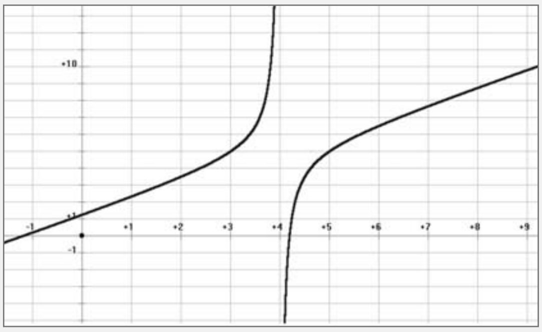
Applications

Exercice 1

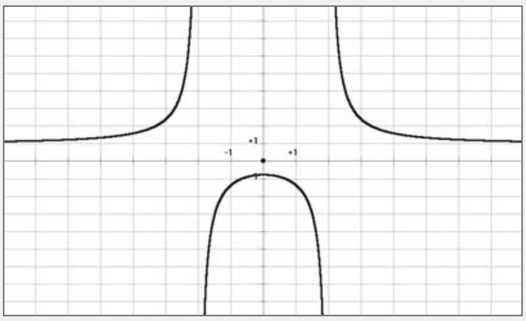
Dans chacun des cas ci-dessous on donne la courbe(C) représentant la fonction f dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Combien comporte-telle de branches infinies ?



a) $f(x) = \sqrt{x}$



b) $f(x) = x + 1 - \dfrac{1}{x - 4}$



c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]1\ ;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{1}{x-1}$ et soit (C) sa représentation dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Calculer $\lim\limits_{1} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$. Que concluez-vous ?

Exercice 3

Dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ montrer que la droite (D) d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale de la courbe $(C) : y = \dfrac{x^2+1}{x^2-5x+4}$.

Exercice 4

Dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, montrer que la droite (D) d'équation $x = 4$ est une asymptote verticale de la courbe $(C) : y = \dfrac{x+1}{(x-4)^2}$.

Exercice 5

Dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote oblique de la courbe $(C) : y = \dfrac{-x^2-x+3}{x+2}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 6

Dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, étudier la position de la droite $(D) : y = -x + 1$ par rapport à la courbe $(C) : y = \dfrac{-x^2-x+3}{x+2}$.

Approfondissements

Exercice 7

Dans les cas, ci-dessous, on donne le tableau de variation de la fonction *f*. Indiquer l'équation des asymptotes à la courbe (C) représentant *f* dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a)

x	-2		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-3	↗	1

b)

x	3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	5

Exercice 8

Soient *f* la fonction définie sur]-1 ; +∞[par $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 8}{x+1}$, et (C) sa représentation dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Que concluez-vous ?

2. a) Montrer que $f(x) = -x + 3 + \dfrac{5}{x+1}$.

b) En déduire que la droite (D) d'équation $y = -x + 3$ est une asymptote oblique de (C) en +∞.

3. Positions relatives de (C) et (D) :

a) étudier le signe de $f(x) - (-x + 3)$. Interpréter graphiquement ce résultat ;

b) pour quelles valeurs de x a-t-on $0 < f(x) - (-x + 3) < 0{,}001$? Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 9

Recherche d'une asymptote oblique

Soient f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et (C) sa représentation dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On suppose que (C) admet une asymptote oblique (D) d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$.

1. Montrer que $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
2. Montrer que $b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$.
3. Application :

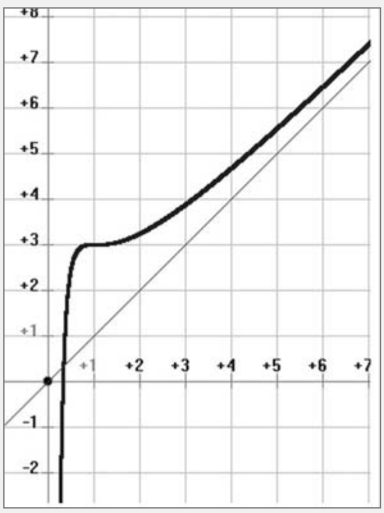
soit f la fonction définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 8}{x+1}$.

- **a**) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. On note a le résultat.
- **b**) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$.
- **c**) Que concluez - vous ? Comparez le résultat avec celui de l'exercice 8.

Exercice 10

On considère une fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ dont la courbe représentative (C) est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

La droite (D) d'équation $y = x$ est également représentée dans le repère.



Représentation de f et de son asymptote oblique (D)

Le but du problème est, dans une première partie, de déterminer graphiquement certaines propriétés de la fonction f, puis de les prouver dans une deuxième partie.

Partie A

Exploitation du graphique

1. On suppose que l'axe des ordonnées et la droite (D) sont asymptotes à la courbe (C).
À partir de cette hypothèse, donner $\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

2. Le point $K\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$ est le point commun à (C) et (D).

D'après la représentation graphique, quelle est en fonction de x, la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D) ?

3. D'après la représentation graphique, quel est le sens de variation de f ?

Partie B

Justification des observations graphiques

La fonction f est définie par $f(x) = x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$ pour $x > 0$.

1. a) Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, puis $\lim_{x\to +\infty} f(x) - x$ et justifier le fait que la droite (D) est asymptote à la courbe (C).

b) En étudiant le signe de $f(x) - x$, retrouver les résultats de la question A.2.

2. a) Montrer que, pour tout x strictement positif, $f(x)$ peut s'écrire : $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2}$.

b) Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$ et justifier le fait que l'axe des ordonnées est asymptote à (C).

3. a) Calculer la dérivée $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$ pour $x > 0$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variations de la fonction f.

c) Calculer une équation de la droite (T) tangente au point A d'abscisse 1 de (C).

Logarithme népérien Fonctions exponentielles Fonctions puissances

Séquence 5

➤ Prérequis

- Généralités sur les fonctions, dérivées, limites

➤ Objectifs

- Consolidation et approfondissement des acquis sur les fonctions logarithme népérien, exponentielles et puissances réelles

➤ Contenu

1. Fonctions logarithme népérien et exponentielle de base *e*

1A. Définition - Conséquences

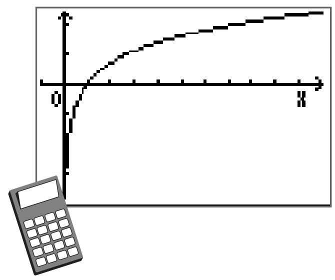
Rappelons que si une fonction *f* admet une primitive *F* sur R alors *f* admet une infinité de primitives sur R, et que parmi celles-ci il n'en existe qu'une seule qui s'annule pour $x = 1$.

Définition

On appelle fonction logarithme népérien, et l'on note *ln*, **l'unique primitive,** définie pour $x > 0$, de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ et qui s'annule pour $x = 1$.

On a donc pour $x > 0$, $(lnx)' = \frac{1}{x}$ et $ln\,1 = 0$.

Représentation graphique



Théorème

La fonction logarithme népérien est bijective de $\mathbf{R}^{\star}_{+}$ sur **R**.

En effet, la fonction *ln* est dérivable et strictement croissante (car $\frac{1}{x} > 0$) :

c'est donc une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $f(]0\,;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to 0} lnx\,;\lim\limits_{x\to+\infty} lnx\right[$.

Comme par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0} ln\,x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x = +\infty$, la fonction *ln* est bijective de $]0\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;+\infty[$.

Conséquence de la définition

Si $0 < x < 1$ alors $ln\,x < ln1$ car la fonction *ln* est strictement croissante, donc $ln\,x < 0$

De même si $1 < x$ alors $ln1 < ln\,x$ donc $0 < ln\,x$.

Par exemple : $ln\,0{,}5 = -\,0{,}693\,147...$ et $ln\,2 = +\,0{,}693\,147...$

Sur votre calculatrice, la touche **LN** correspond à la fonction logarithme népérien, **LOG** correspond à la fonction logarithme décimal *log* :

$$log(x) = \frac{ln\ (x)}{ln\ (10)}.$$

Définition - Le nombre e

On appelle **nombre *e*** l'unique solution de l'équation $lnx = 1$. On a donc : $ln\ e = 1$.
On établit que $\boldsymbol{e = 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 9...}$

Définition

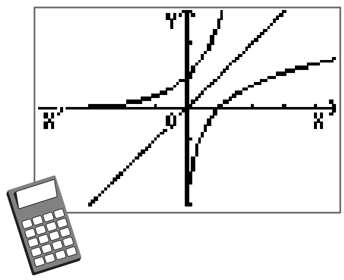
On appelle **fonction exponentielle de base *e*** la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. On la note indifféremment $x \mapsto exp(x)$ *ou* $x \mapsto e^x$.

Si $x > 0$ alors $\boldsymbol{e^{lnx} = x}$ et si $x \in \mathbf{R}$ alors $\boldsymbol{ln(e^x) = x}$.

Exemple

$e^{ln2} = 2$ *et* $ln(e^3) = 3$.

Dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ les courbes représentant $x \mapsto e^x$ *et* $x \mapsto ln(x)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Conséquences de la définition

1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$: $e^x > 0$.

2. La fonction exponentielle de base e est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]0\ ;+\infty[$.

3. Si $x > 0$ et $y \in \mathbf{R}$ alors $y = lnx$ équivaut à $x = e^y$ et en particulier :

$$\begin{cases} e^o = 1 \text{ (car } ln1 = 0) \\ e^1 = e \text{ (car } lne = 1) \end{cases}$$

1B. Propriétés algébriques

Théorème

Propriété fondamentale du logarithme népérien.

Pour tous réels a et b **strictement positifs** :

$$ln\ (ab) = ln\ a + ln\ b$$

$$ln\ (\frac{a}{b}) = lna - lnb\ ;\ ln\ (\frac{1}{b}) = -lnb$$

$$ln\ (a^n) = n.\ lna \text{ pour } n \in \mathbf{Z}$$

$$ln\ (a^{p/q}) = \frac{p}{q}.\ ln\ a \text{ pour } (p,\ q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^\star$$

Exemples

$$\begin{cases} ln3 + ln2 = 1,791\ 759... \\ ln6 = 1,791\ 759... \end{cases} \quad \begin{cases} ln3 - ln2 = 0,405\ 465... \\ ln\frac{3}{2} = 0,405\ 465... \end{cases} \quad \begin{cases} ln5 = 1,609\ 437... \\ ln\frac{1}{5} = -1,609\ 437.. \end{cases}$$

$$\begin{cases} ln3^4 = ln\ 81 = 4,394\ 449... \\ 4.ln3 = 4,394\ 449... \end{cases} \quad \begin{cases} ln\sqrt{6} = 0,895\ 879... \\ \frac{1}{2}.ln6 = 0,895\ 879... \end{cases}$$

Applications/Exercices 1 et 2

Remarques

1. Pour deux réels a et b non nuls avec $ab>0$: $ln(ab) = ln|a| + ln|b|$. Noter par exemple que $ln\ 6 = ln(-2)(-3)$ *mais* «$ln(-2) + ln(-3)$» n'est pas défini.
2. De même noter l'égalité $ln(a^2) = 2.ln|a|$ … et non $2.ln(a)$ qui n'est définie que pour $a > 0$.

Propriété

Si a *et* b sont deux réels alors :

$e^a.e^b = e^{a+b}$; $(e^a)^b = e^{a.b}$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.

Applications/Exercice 3

1C. Application à la résolution d'équations et d'inéquations

1C1. Équations logarithmiques et exponentielles

Propriété

La fonction *ln* étant une bijection strictement croissante, pour tous réels a, b strictement positifs et c quelconque, on a :

$$\ln a = \ln b \text{ équivaut à } a = b$$
$$\ln a = c \text{ équivaut à } a = e^c.$$

Exemple 1

Résolvons l'équation logarithmique $\ln(x\text{-}1) = 3.\ln 2$.

Cette équation est définie si $x - 1 > 0$ c'est-à-dire pour $x \in\ ]1\ ;+\infty[$

Si $x \in\ ]1\ ;+\infty[$ $(x > 1)$ alors l'équation est équivalente à :

$\ln(x\text{-}1) = \ln 8$ c'est-à-dire $x - 1 = 8$

d'où $x = 9$.

L'équation a donc pour unique solution $x = 9$.

Applications/Exercice 4

Exemple 2

Résolvons l'équation logarithmique $\ln(3x+ 1) = 4$

L'équation n'est définie que si $3x + 1 > 0$ c'est-à-dire si $x \in\ ]-1/3\ ;+\infty[$

Si $x \in\ ]-1/3\ ;+\infty[$ $(x > -1/3)$ alors l'équation est équivalente à :

$$e^{\ln(3x+1)} = e^4 \text{ soit } 3x + 1 = e^4\ .$$

L'équation a donc pour unique solution $x = (e^4 - 1)/3$.

Applications/Exercice 5

Propriété

La fonction *exp* étant une bijection strictement croissante, pour tous réels a, b quelconques et c strictement positif, on a :

$$e^a = e^b \quad \text{équivaut à} \quad a = b$$
$$e^a = c \quad \text{équivaut à} \quad a = \ln c$$

Exemple 3

L'équation $e^{x+3} - e^{-2x} = 0$ est définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ et est équivalente à

$$e^{x+3} = e^{-2x} \text{ soit } x + 3 = -2x \text{ d'où } x = -1.$$

Exemple 4

L'équation $e^{x} - 3 = 0$ est définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ et est équivalente à :

$$e^{x} = 3 \text{ ou encore à } ln(e^{x}) = ln3 \text{ d'où } x = ln3.$$

Applications/Exercice 6

1C2. Inéquations logarithmiques et exponentielles

Propriété

La fonction *ln* étant une bijection strictement croissante, on a :
pour tous réels *a*, *b* strictement positifs et *c* quelconque :

$$ln\ a < ln\ b \text{ équivaut à } a < b$$

$$ln\ a < c \text{ équivaut à } a < e^{c}$$

Exemple 1

Résolvons l'inéquation logarithmique $ln(2x\text{-}1) \leq ln(x+5)$

a) Cette inéquation est définie si $\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x+5 > 0 \end{cases}$.

c'est à dire si $x \in \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

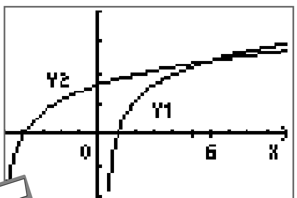
b) Si $x \in \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ $\left(x > \frac{1}{2}\right)$ alors l'inéquation est équivalente à :

$$(2x\text{-}1) \leq (x+5) \text{ c'est-à-dire à } x \leq 6.$$

c) L'inéquation a donc pour ensemble de solutions.

$$S = \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[\cap \left]-\infty ; 6\right] = \left]\frac{1}{2} ; 6\right].$$

On pourra observer ce résultat à l'aide d'une calculatrice graphique en représentant les courbes d'équations $y_1 = ln(2x\text{-}1)$ et $y_2 = ln(x+5)$.



Les solutions x de l'inéquation $ln(2x\text{-}1) \leq ln(x+5)$ sont les abscisses des points de (C_1): $y = ln(2x\text{-}1)$ situés au dessous de (C_2) : $y = ln(x+5)$.

Applications/Exercice 7 et 8

Propriété

La fonction *exp* étant une bijection strictement croissante, pour tous réels a strictement positif et x, y quelconques :

$$e^x > a \quad \text{équivaut à} \quad x > \ln a$$
$$e^x > e^y \quad \text{équivaut à} \quad x > y.$$

Exemple 2

L'inéquation $e^{2-x} > 1$ est définie pour tout $x \in \mathbf{R}$. Elle est équivalente à :

$$ln(e^{2-x}) > ln1 \text{ c'est à dire à } 2 - x > 0.$$

Elle a pour ensemble de solutions S =]- ∞ ; 2[.

Applications/Exercice 9

1D. Propriétés analytiques

Théorème 1

a) $\lim\limits_{x \to 0} lnx = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} lnx = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0} x.lnx = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0} x^n.lnx = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x^n} = 0$ pour $n \in \mathbf{N}^\star$.

Remarques

1. Le **a)** indique que l'ensemble image de]0 ; +∞[par la fonction *ln* est **R** et donc que *ln* est bien une bijection de]0 ; +∞[sur **R**.

2. Pour **c)** on dit qu'au voisinage de zéro et de l'infini, la fonction monôme croît plus rapidement que la fonction *ln*.

Applications/Exercice 10

Théorème 2

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n.e^x = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ *pour* $n \in \mathbf{N}^\star$.

Remarque

Pour **c)** on dit qu'au voisinage de l'infini, la fonction exponentielle de base e croît plus rapidement que la fonction monôme.

Applications/Exercice 11

Théorème 3 – Dérivés

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et telle que $u(x) > 0$ pour tout $x \in$ I, alors :

$$\left(ln(u(x)) \right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Exemple

La fonction dérivée de la fonction $x \mapsto ln\ (x^2+1)$ sur **R** est :

$$x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Applications/Exercice 12

Conséquence

Sur tout intervalle où $u > 0, x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ admet donc pour primitives $x \mapsto ln(u(x)) + cte$.

Par exemple, la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{2x-1}$ définie sur $]\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty[$.

admet pour primitives $x \mapsto ln\ (2x\text{-}1) + cte$ sur $]\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty[$.

Applications/Exercice 13

Théorème 4

1. La fonction exponentielle de base e est dérivable sur **R**, de plus $(e^x)' = e^x$

2. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction composée $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I de plus :

$$(e^{u(x)})' = u'(x).\ e^{u(x)}.$$

Exemples

1. La fonction $x \mapsto 5e^x - 2x$ est dérivable sur **R** et sa dérivée est $x \mapsto 5e^x - 2$.

2. La fonction $x \mapsto e^{x^2-3x}$ est dérivable sur **R** et sa dérivée est $x \mapsto (2x\text{-}3).\ e^{x^2-3x}$.

Applications/Exercice 14

Conséquences

1. Les primitives de $x \mapsto e^{ax+b}$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{a}e^{ax+b} + cte$.

2. Les primitives de $x \mapsto u'(x).e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + cte$.

Exemples

1. La fonction $x \mapsto e^{-x} + e^{3x}$ a pour primitives $x \mapsto -e^{-x} + \frac{1}{3}e^{3x} + cte$.

2. La fonction $x \mapsto (2x\text{-}1)\ e^{(x^2-x)}$ a pour primitives $x \mapsto e^{(x^2-x)} + cte$.

Applications/Exercice 15

2. Fonction exponentielle de base *a*

2A. Définition et conséquences

Définition

On appelle fonction exponentielle de base $a > 0$ $(a \neq 1)$ la fonction définie sur **R** par

$$x \mapsto a^x = e^{x.\ln a}$$

Conséquences

1. Pour tout $x \in$ **R** : $a^x > 0$ et $\begin{cases} a^0 = e^{0.\ln a} = 1 \\ a^1 = e^{1.\ln a} = a \end{cases}$

2. Si $x \in$ **R** et $y \geq 0$ alors $y = a^x$ équivaut à $\ln(y) = x.\ln(a)$.

2B. Propriétés algébriques

Propriété

Pour $a, b \in]0, 1[\cup]1 ; +\infty[$ *et* x, y réels :

$$a^x.a^y = a^{x+y} \quad ; \quad a^x.b^x = (ab)^x \quad ; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad ; \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad ; \quad (a^x)^y = a^{x.y}.$$

Propriété

Pour $a \in]0, 1[\cup]1 ; +\infty[$ et x, y réels :

$a^x = a^y$ *équivaut à* $x = y$

$a^x < a^y$ *équivaut à* $x > y$ *si* $a \in]0 ; 1[$

$a^x < a^y$ *équivaut à* $x < y$ *si* $a \in]1 ; +\infty[$

Exemples

a) $2^x \leq 16$ équivaut à $2^x \leq 2^4$ c'est-à-dire $x \leq 4$.

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \frac{1}{81}$ équivaut à $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^4$ c'est-à-dire $x \geq 4$.

Application aux équations

Exemple

Résolvons l'équation $2.2^{2x}-5.2^x + 3 = 0$.

a) L'équation est définie pour tout $x \in \mathbf{R}$. Elle est équivalente au système

$\begin{cases} X = 2^x \\ 2X^2 - 5X + 3 = 0 \end{cases}$ dont les solutions sont $X = \frac{3}{2}$ ou $X = 1$.

Si $X = \frac{3}{2}$ alors $2^x = \frac{3}{2}$ d'où $x.ln2 = ln\left(\frac{3}{2}\right)$ c'est-à-dire $x = \frac{ln\ 1,5}{ln\ 2}$.

Si $X = 1$ alors $2^x = 1$ d'où $x = 0$.

b) L'équation a donc pour ensemble de solutions $S = \{0 ; \frac{ln\ 1,5}{ln 2}\}$.

Applications/Exercice 16

2C. Propriétés analytiques

Propriété

La fonction exponentielle de base a ($a > 0$; $a \neq 1$) est dérivable sur **R**, de plus $(a^x)' = ln(a).a^x$.

Exemple

$(3^x)' = ln(3).3^x$.

Applications/Exercice 17

Suivant les valeurs du réel a, $a \in]0 ; 1 [$ ou $a \in]1 ; +\infty[$, les variations de la fonction exponentielle de base a sont données par les tableaux ci-dessous :

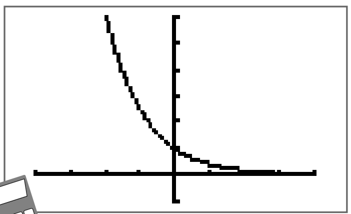
Si $a \in]0 ; 1 [$: $ln(a) < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

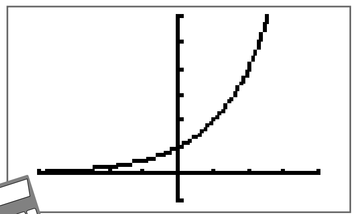
Si $a \in]1 ; +\infty[$: $ln(a) > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

On obtient, par exemple, les représentations suivantes :



$(C_2) : y = 0{,}4^x$



$(C_1) : y = 2^x$

Applications/Exercice 18

3. Fonctions puissances

3A. Définition et conséquences

Définition

Pour a réel, on appelle fonction puissance la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par :

$$x \mapsto x^a = e^{a.\ln x} \quad (x \neq 0)$$
$$0 \mapsto 0$$

Remarque

Pour tout $x > 0$ on a $x^a > 0$.

3B. Propriétés algébriques

Propriété

Pour a, b constantes réelles et pour $x > 0$:

$$x^a.x^b = x^{a+b} \quad ; \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a} \quad ; \quad x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b} \quad ; \quad (x^a)^b = x^{ab}.$$

Remarque – Puissances rationnelles

Pour x positif :

$$x^{1/2} = \sqrt{x} \quad ; \quad x^{1/3} = \sqrt[3]{x} \quad ; \quad x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \quad et \quad x^{p/n} = \sqrt[n]{x^p} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^p.$$

Exemple

Pour x positif : $\sqrt[3]{x^6} = \left(x^6\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$.

Applications/Exercice 19

3C. Propriétés analytiques

Propriété

Pour a réel, la fonction puissance est dérivable sur $]0;+\infty[$, de plus $(x^a)' = a.x^{a-1}$.

Exemples

- $(x^{\pi})' = \pi.x^{\pi -1}$
- $(x^{e})' = e.x^{e -1}$

Applications/Exercice 20

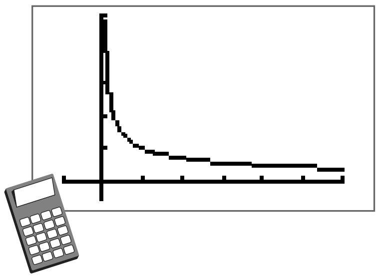
Si $a < 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

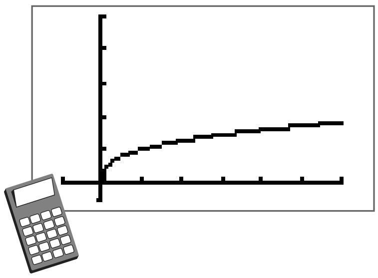
Si $a > 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$+\infty$

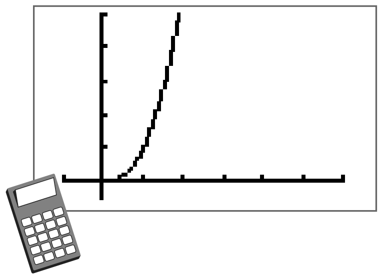
On obtient, par exemple, les représentations suivantes :



$(C_1) : y = x^{-1/2}$



$(C_2) : y = x^{1/3}$



$(C_3) : y = x^{5/2}$

4. Croissances comparées des fonctions logarithme népérien, exponentielles et puissances

Théorème – Limites en + ∞

Si a est une constante réelle strictement positive alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0.$$

Exemples

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{e^x} = 0.$$

Remarques

1. Ces résultats généralisent ceux obtenus pour la fonction monôme. On dit de même qu'au voisinage de l'infini, la fonction exponentielle croît plus vite que la fonction puissance $x \mapsto x^a$ $(a > 0)$ qui elle-même croît plus vite que la fonction logarithme népérien.
2. On déduit des résultats précédents que pour $a > 0$:

$$\lim_{x\to-\infty} x^a e^x = 0$$

Applications/Exercice 21

Exercices autocorrectifs

Applications

Fonctions logarithme népérien et exponentielle de base e

Calculs

Exercice 1

Simplifier l'écriture des réels :

$$A = \ln 2 + \ln\left(\frac{3}{2}\right) ;$$

$$B = \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \ln\left(\frac{16}{27}\right) ;$$

$$C = 3.\ln 5 + \ln\left(\frac{8}{75}\right).$$

Exercice 2

Exprimer à l'aide des réels $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$ les réels :

$\ln 8$; $\ln 9$; $\ln 75$; $\ln 0{,}9$; $\ln(60)$; $\ln\left(\frac{25}{27}\right)$.

Exercice 3

Simplifier les expressions : $A = e^{\ln 5}$ $B = \ln(e^4)$ $C = e^{-\ln 2}$ $D = e^{3\ln 2}$ $E = \ln(2e^3)$

Equations

Exercice 4

Résoudre dans **R** l'équation ci-dessous, puis observer sur votre calculatrice le résultat :

$$\ln(x-1) + \ln 2 = \ln(x+2)$$

Exercice 5

Résoudre dans **R** les équations : **a)** $ln(x+3) -2 = 0$; **b)** $ln(x+1) +1 = 0$.

Exercice 6

Résoudre dans **R** les équations : **a)** $e^x - e^{-2-x} = 0$; **b)** $e^{2x} - 5 = 0$.

Inéquations

Exercice 7

Résoudre dans **R** l'inéquation $2.ln(x) \geq ln(3x-2)$.

Exercice 8

Résoudre dans **R** l'inéquation $ln(3x-1) > 2$.
On observera le résultat sur une calculatrice graphique.

Exercice 9

Résoudre dans **R** l'inéquation $-3e^x + 8 > 0$.

Limites

Exercice 10

1. Calculer les limites de la fonction $x \mapsto 2.\, ln(3-x)$ aux bornes de son domaine de définition.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x - lnx)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x) - 4x}{x}$.

Exercice 11

1. Calculer les limites de la fonction définie par $f(x) = x - e^{-x}$ aux bornes de son domaine de définition.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - e^x)$.

Dérivées – primitives

Exercice 12

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies par :

a) $f(x) = x.\, ln(x) - x$; **b)** $f(x) = \dfrac{1 + lnx}{x}$

c) $f(x) = (1 + ln\, x)^2$; **d)** $f(x) = ln(x^2+3x+4)$.

8 2930 TG PA 01

Exercice 13

Déterminer les primitives de la fonction définie sur]-3 ; +∞[par :

$$f(x) = \frac{2}{x+3}.$$

Exercice 14

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies par :

a) $f(x) = e^x - e.x$; **b)** $f(x) = e^{2x} - e^{-x}$

c) $f(x) = (2x - 3).e^{2x}$; **d)** $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x + 2}$.

Exercice 15

Déterminer les primitives sur **R** des fonctions définies par :

a) $f(x) = e^x + 2x$; **b)** $f(x) = e^x + 2$; **c)** $f(x) = e^{x+2}$; **d)** $f(x) = e^{2x}$

Fonction exponentielle de base a

Equation et inéquation

Exercice 16

Résoudre dans **R** l'équation et l'inéquation : **a)** $2^{2x} - 8 = 0$; **b)** $3^{2x+1} > 3$.

Dérivées

Exercice 17

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies par :

a) $f(x) = 3^x - x^3$; **b)** $f(x) = 3^{2x} - 3^{-x}$.

Limites

Exercice 18

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x - 3^x)$.

2. Déterminer les limites de la fonction $x \mapsto x - 9^x$ aux bornes de son domaine de définition.

Fonctions puissances

Calculs

Exercice 19

Simplifier les expressions :

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{2}}.\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} \text{ et } B = \frac{\sqrt{3}.\sqrt[3]{36}}{2.\sqrt[4]{9}}.$$

Dérivées

Exercice 20

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies par :

a) $f(x) = x^e - ex$; **b)** $f(x) = x^{\sqrt{2}}$.

Croissances comparées

Exercice 21

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x).e^{-x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ln(x^3)}{x^2}$.

Approfondissements

Propriété fondamentale

Exercice 22 - Propriété fondamentale du logarithme népérien

1. Soit a un réel strictement positif et g la fonction définie pour $x > 0$ par

$$g(x) = ln(ax) - ln\ x.$$

Montrer que g est une fonction constante.

2. On pose pour tous réels strictement positifs a et x : $ln(ax) - ln\ x = c$.
Déterminer la valeur de c, et en déduire que $ln(ax) = lna + ln\ x$.

Équations et inéquations

Exercice 23

Résoudre dans **R** les équations, ci-dessous, puis observer sur votre calculatrice les résultats.

a) $2\ ln(x-1) - ln(x+2) = 0$; **b)** $ln(x^2-1) + 2.ln2 > ln(4x-1)$.

Exercice 24

On considère le polynôme de la variable réelle x : $P(x) = 6x^2 - 5x - 1$.

1. Résoudre dans **R** l'équation $P(x) = 0$.

2. a) En posant $X = e^x$ déduire du **1.** les solutions dans **R** de l'équation

$$6.e^{2x} - 5e^x - 1 = 0.$$

b) En posant $X = ln(x)$ déduire du 1. les solutions dans **R** de l'équation

$$6.(ln\ x)^2 - 5ln\ x - 1 = 0.$$

Exercice 25

On considère le polynôme P de la variable réelle x défini par $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$.

1. Calculer $P(1)$.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que $P(x) = (x - 1).(ax^2 + bx + c)$.

3. Résoudre dans **R** l'équation $P(x) = 0$.

4. En déduire les solutions dans **R** des équations :

a) $2\ e^{3x} + e^{2x} - 5.e^x + 2 = 0$; b) $2(ln\ x)^3 + (ln\ x)^2 - 5.lnx + 2 = 0$.

Dérivées – primitives

Exercice 26

On considère la fonction h définie par : $h(x) = x.\ ln\ x - x$.

1. Calculer $h'(x)$.

2. En déduire sur $]0\ ;+\infty[$ une primitive G de la fonction g définie par :

$$g(x) = 2x - 3 + ln\ x.$$

Exercice 27

On considère la fonction f définie sur **R** par : $f(x) = (5x - 2)e^x$.
Déterminer les réels a, et b afin que la fonction F définie par $F(x) = (ax + b).e^x$ soit une primitive de f sur **R**.

Etude de fonctions

Exercice 28

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2.ln(x)$.

On note (C) sa courbe représentative dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{0} f$. Qu'en déduisez-vous ?

b) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$.

2. Calculer $f'(x)$.

3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4. Complétez le tableau de valeurs de $f(x)$ ci-dessous à 10^{-2} près par défaut :

x	1/4	1/3	1/2	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$								

5. Représenter (C).

6. Déterminer graphiquement les solutions de l'inéquation

$$f(x) \leq 2.$$

Exercice 29

Informatique de gestion - Nouvelle Calédonie 2000 (Partiel)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty[$ par $f(x) = (x+3)(e^{-x} - x + 6)$.

A) Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $[\,0\,;+\infty[$ par $g(x) = (-x-2)e^{-x} - 2x + 3$.

On donne le tableau de variation de g.

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	1	0	$-\infty$

1. Déterminer, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

2. a) Reproduire et compléter le tableau suivant (donner les résultats sous forme décimale, arrondis à 10^{-3} près) :

x	0,88	0,89	0,90	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95
$g(x)$								

b) En déduire un encadrement de α, d'amplitude 10^{-2}.

B) Etude de *f*.

1. a) Étudier la limite de f en $+\infty$.

b) Vérifier que pour tout x appartenant à $[0\,;+\infty[$ $f'(x) = g(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

Donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ en prenant 0,92 pour valeur approchée de α.

d) Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;6]$, $f(x) > 0$.

2. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités : 2 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée).

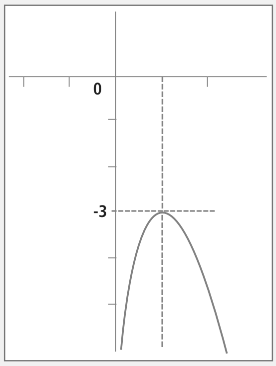
Tracer la courbe (C).

Exercice 30

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$g(x) = -x^2 - 2 + 2\ln x$ dont on donne ci-contre la représentation graphique.



Par lecture graphique :

a) Donner le tableau de variation de g.

b) Déterminer le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0 ; +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = -x + 5 - 2.\dfrac{\ln x}{x}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (*unité graphique : 1 cm*).

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

3. a) Calculer la dérivée f' de f.

b) Vérifier que pour tout x de $]0 ;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

c) En déduire le signe de f', puis le tableau de variation de f.

4. Tracer (C) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

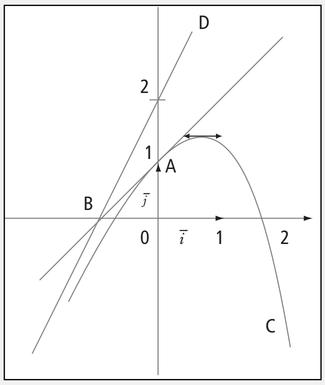
On précisera les valeurs décimales approchées de $f(x)$ à 0,01 près pour les valeurs entières de x allant de 1 à 10 inclus.

5. Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$.

Calculer la dérivée de h. En déduire une primitive F de f sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice 31

Le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est orthonormé (unité 2 cm).



La courbe (C) ci-contre est la courbe représentative de la fonction f définie sur **R** par : $f(x) = 2x + 2 - e^x$.

La droite (D) a pour équation : $y = 2x + 2$. Le point A a pour coordonnées (0 ;1) et le point B a pour coordonnées (-1 ; 0).

On se propose dans ce problème :

– d'étudier graphiquement certaines propriétés de f

– de justifier par le calcul l'étude des propriétés de f et le tracé de (C).

Partie A - Étude graphique

1. a) Préciser $f(0)$.

b) Déterminer une équation de la droite (AB).

c) La droite (AB) est la tangente à la courbe (C) en A. Préciser $f'(0)$.

2. Justifier l'affirmation suivante : L'équation $f(x) = 0$ possède 2 solutions α et β ($\alpha < \beta$).

Par lecture graphique donner un encadrement de chacune de ces solutions par deux entiers consécutifs.

Partie B - Étude de *f*

1. Étudier la position de la courbe par rapport à (D).

2. a) Résoudre l'inéquation : $2 - e^x > 0$.

b) Calculer $f'(x)$.

c) Établir le tableau de variations de f (on calculera la valeur exacte du maximum).

3. Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

4. On se propose de déterminer un encadrement de β d'amplitude 0,1.

Compléter le tableau suivant (on donnera les valeurs à 0,1 près) :

x	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$						

En déduire l'encadrement demandé.

Partie C - Calcul de primitive

Déterminer une primitive de f sur **R**.

Exercice 32

- Informatique de gestion - Session 1999 (Partiel)

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.

1. Calculer $g(1)$.

2. Montrer que g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

3. Déduire des questions précédentes que g est strictement positive sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ et strictement négative sur l'intervalle $]0\,;1[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On admet que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra utiliser le résultat $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$).

2. a) Vérifier que, pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3. a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C).

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

4. a) Recopier et compléter le tableau suivant, en donnant les résultats arrondis à 10^{-1} près.

x	0,25	0,5	1	2	e	4	6	8
$f(x)$								

b) Tracer la droite (D) et la courbe (C). (On prendra 2 cm pour unité graphique).

Partie C

Montrer que la fonction h, définie sur] 0 ; + ∞[par :

$$h(x) = \frac{1}{2}(ln\ x)^2$$

est une primitive de la fonction k, définie sur $\left]0\ ;+\infty\right[$ par $k(x) = \frac{lnx}{x}$.

En déduire une primitive F de f sur] 0 ; + ∞ [.

Unité 3

Suites numériques

➤ Prérequis

- **Notions de fonction et d'application**

➤ Objectifs

- Initiation à l'étude des phénomènes discrets

➤ Contenu

- Séquence 1 : généralités sur les suites numériques
- Séquence 2 : limites des suites
- Séquence 3 : suites arithmétiques – suites géométriques

Généralités sur les suites numériques

Séquence 1

➤ Prérequis

- Notions de fonction et d'application

➤ Objectifs

- Initiation à l'étude des phénomènes discrets

➤ Contenu

1. Définition - propriétés

Définition

Une suite numérique u définie sur **N** est une application de **N** vers **R**.

$$u : n \mapsto u(n)$$

$u(n)$ est le terme général de la suite u. On le note encore u_n. La suite u est aussi notée $(u_n)_n$, $n \in$ **N**.

Exemples

1. La suite $(u_n)_n$ définie sur **N** par $u : n \mapsto 2n + 1$ a pour terme général

$$u_n = 2n + 1.$$

Ses premiers termes sont : $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$, …
C'est la suite des nombres impairs.

2. La suite $(v_n)_n$ définie sur **N** * par $v_n = \dfrac{n^2+2}{n(n+1)}$ a pour premiers termes :

$$v_1 = \frac{3}{2}, v_2 = 1, v_3 = \frac{11}{12}, \text{ etc.}$$

3. Soit $(u_n)_n$ la suite des nombres premiers c'est-à-dire des nombres entiers qui ont 2 diviseurs entiers distincts 1 et eux mêmes. $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$, $u_4 = 11$, etc.

Remarque

Parmi les suites précédentes certaines peuvent être notées $u_n = f(n)$, et ne sont que des cas particuliers de fonctions numériques seulement définies sur **N**.

Ces suites sont représentées comme des fonctions dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en portant n en abscisse et u_n en ordonnée.

Exemples

Pour u et v définies, respectivement, par $u_n = 2n+1$ et $v_n = \dfrac{n^2+2}{n(n+1)}$.

Applications/Exercice 1

Remarque

Une suite numérique u peut aussi être définie sur un sous-ensemble I de **N** qui est l' ensemble des indices de la suite. Nous ne traiterons que les suites définies sur **N** ou sur **N** *.

Définition

Si pour tout indice n on a : $u_n.u_{n+1} < 0$ la suite est dite alternée.

Exemple

La suite $(u_n)_n$ définie sur **N** par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ a pour premiers termes :

$$u_0 = 1,\ u_1 = -\frac{1}{2},\ u_2 = \frac{1}{3},\ \text{etc.}$$

Elle est alternée car :

$$u_n\, u_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{(-1)}{(n+1)(n+2)} < 0.$$

Définition

On appelle suite récurrente toute suite définie par un ou plusieurs premiers termes et une relation liant des termes successifs de cette suite.

Exemple

La suite $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 6 \quad si \quad n \geq 0 \end{cases}$ est une suite récurrente.

On a successivement

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 6 = 6,\ u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 6 = 9,\ u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 6 = \frac{9}{2} + 6 = \frac{21}{2},\ \text{etc.}$$

Applications/Exercice 2

2. Variations des suites

2A. Variations

Définition

Soit u une suite définie sur **N** par $u : n \to u_n$. On rappelle que :
u est croissante sur I si $\forall n, u_{n+1} \geq u_n$
u est strictement croissante sur I si $\forall n, u_{n+1} > u_n$
u est stationnaire si $\forall n, u_{n+1} = u_n$.

On définit de la même manière les suites décroissantes et strictement décroissantes.

Remarque

L' étude des variations de u revient donc à l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$.

Exemples

1. La suite $(u_n)_n$ définie sur **N** par $u_n = 3n - 5$ est une suite strictement croissante car :

$$u_{n+1} - u_n = (3(n+1) - 5) - (3n - 5) = 3n + 3 - 3n = 3.$$

2. La suite $(v_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n - 5 \quad si \quad n \geq 0 \end{cases}$$

est une suite strictement décroissante car : $v_{n+1} - v_n = -5$.

Applications/Exercice 3

Remarque

Pour les suites à termes **strictement positifs** on a :

$$u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \text{ et } u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$$

L' étude des variations de u revient alors à comparer

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ à } 1.$$

Exemple

La suite $(u_n)_n$ définie sur **N** par $u_n = \dfrac{1}{n\,(n+1)}$ est une suite à termes strictement positifs.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}$$

donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$

(u_n) est une suite strictement décroissante.

Applications/Exercice 4

Théorème

Soit f une fonction **de R → R**.
Si f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, alors la suite $u_n = f(n)$ est strictement croissante.
Si f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$, alors la suite $u_n = f(n)$ est strictement décroissante.

Exemples

1. La suite $(u_n)_n$ définie sur **N** par $u_n = 3n - 5$ est une suite strictement croissante car la fonction $x \mapsto 3x - 5$ est strictement croissante sur **R**.

2. La suite $(v_n)_n$ définie sur **N** par :

$$v_n = \frac{n+1}{2n+1}$$

est une suite strictement décroissante car la fonction

$$x \mapsto \frac{x+1}{2x+1}$$

est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

Applications/Exercice 5

2B. Suites monotones

Définition

On dira que la suite u est monotone si elle est croissante ou décroissante.

On dira que la suite u est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemples

1. Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies au § 2.A. par : $u_n = 3n - 5$ et

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n - 5 \quad si \quad n \geq 0 \end{cases}$$

sont des suites strictement monotones.

2. La suite $(w_n)_n$ définie par $w_n = (-1)^n\, n$ et dont les premiers termes sont

$$w_0 = 0,\ w_1 = -1,\ w_2 = +2, \ldots$$

n'est pas une suite monotone.

Applications/Exercice 6

2C. Suites bornées

Définition

Soit u une suite définie sur **N** par $u : n \to u_n$

On dira que u est majorée s'il existe un réel M tel que $\forall n, u_n \leq M$.

On dira que u est minorée s'il existe un réel m tel que $\forall n, m \leq u_n$.

Une suite à la fois majorée et minorée est dite bornée.

Exemples

1. La suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = -n + 1$ est une suite décroissante majorée par $M = 1$ et qui n'est pas minorée.

2. La suite $(v_n)_n$ définie par :

$$v_n = \frac{1}{n+1}$$

est une suite décroissante à termes positifs.

On a $0 \leq v_n \leq v_0$ c'est-à-dire : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ 0 \leq v_n \leq 1$.

La suite $(v_n)_n$ est une suite majorée et minorée. Elle est donc bornée.

Remarque

Les réels m et M cherchés, appelés respectivement minorant et majorant de la suite, doivent être indépendants de l'indice n.

Applications/Exercice 7

Exercices autocorrectifs

Applications

Définition – Représentation

Exercice 1

Déterminer et représenter les 6 premiers termes des suites u et v définies sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_n = -\frac{1}{2}n+5 \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Exercice 2

Déterminer et représenter les 6 premiers termes des suites récurrentes u et v définies sur $\mathbf{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 5 \ \ si \ \ n \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 1 - \frac{1}{v_n} \ \ si \ \ n \geq 0 \end{cases}$$

Variations

Exercice 3

Étudier les variations des suites u et v définies sur $\mathbf{N}$ par :

a) $u_n = -\frac{1}{2}n+5$; **b)** $v_n = 2 - \frac{1}{n+1}$

Exercice 4

a) Étudier les variations de la suite u définie sur $\mathbf{N}$ et à termes strictement positifs par

$$u_n = \frac{2^n}{n+1}$$

b) Montrer que la suite **v** définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$v_n = \frac{n(n+1)}{e^n}$$

est strictement décroissante pour **n**>3

Exercice 5

Étudier les variations des suites u et v définies sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_n = \frac{n^2+1}{n^2+3} \quad \text{et} \quad v_n = -\frac{n}{3} + ln(n+1).$$

Exercice 6

1. Soit u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{8}{3} \quad si \;\; n \geq 0 \end{cases}$$

a) Déterminer les 6 premiers termes.
b) On admet que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $u_n < 4$. Montrer que u est une suite strictement croissante.

2. Soit u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 15 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{8}{3} \quad si \;\; n \geq 0 \end{cases}$$

a) Déterminer les 6 premiers termes.
b) On admet que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $u_n > 4$. Montrer que u est une suite strictement décroissante.

Suite majorée, minorée, bornée

Exercice 7

1. Étudier les variations de la suite u définie sur $\mathbf{N}$ par $u_n = 3 - 0{,}8^n$.
2. Montrer que u est majorée par 3, puis que u est bornée.

Approfondissements

Variations

Exercice 8

Soit $n \in \mathbf{N}$. Le nombre $n!$ (lire « factorielle n ») est défini par :

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1 \quad si \quad n > 0 \end{cases}$$

1. Déterminer les 6 premiers termes de la suite u définie par $u_n = n!$

2. Indiquer la valeur des quotients

$$\frac{4!}{3!}, \quad \frac{5!}{4!} \quad \text{et} \quad \frac{6!}{5!}.$$

3. Étudier les variations de la suite u définie par $u_n = n!$.

4. Étudier les variations de la suite v définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$v_n = \frac{2^n}{n!}.$$

Exercice 9

On considère les suites u, v définies sur $\mathbf{N}^\star$ par :

$$u_n = 1 - \frac{ln(n)}{n} \quad ; \quad v_n = \frac{n^n}{n!}.$$

1. Déterminer une valeur approchée de leurs 6 premiers termes.
2. Étudier leurs variations.

Suite bornée

Exercice 10

1. Montrer qu'une suite $(u_n)_n$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_n$ est majorée.

2. Soit $(v_n)_n$ la suite définie par :

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

a) Montrer que pour tout entier n : $0 < \dfrac{1}{n+1} \leq 1.$

b) En déduire que $(v_n)_n$ est une suite bornée.

Limites des suites

Séquence 2

➤ Prérequis

- Généralités sur les suites
- Limites des fonctions

➤ Objectifs

- Acquérir le langage relatif aux limites des suites
- Savoir déterminer le comportement d'une suite lorsque l'indice n devient infini

➤ Contenu

1. Définitions - Convergence et Divergence

1A. Suites convergentes

Définition

Soient u une suite numérique et 10^{-p} ($p \in \mathbf{N}^{\star}$) une puissance négative de 10. On dira que ***u* admet pour limite 0 quand *n* tend vers +∞** si l'on peut trouver des indices n pour lesquels $0 < u_n < 10^{-p}$.

On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

Exemple

Soit u la suite définie par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ où } n \in \mathbf{N}^{\star}.$$

Pour obtenir $0 < u_n < 10^{-25}$ il suffit que $0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < 10^{-25}$,

c'est-à-dire $\sqrt{n} > 10^{25}$.

Il suffit donc de choisir les indices n tels que $n > 10^{50}$.

De même pour rendre $0 < u_n < 10^{-p}$ il suffit que

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < 10^{-p}$$

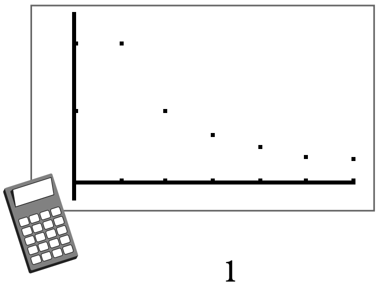
c'est à dire de choisir les indices n tels que $n > 10^{2p}$.

Applications/Exercice 1

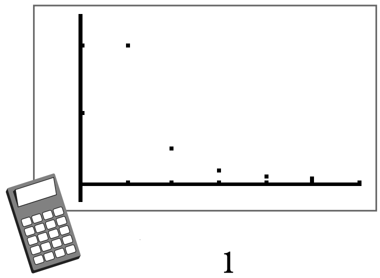
Théorème – Limites des suites de références

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

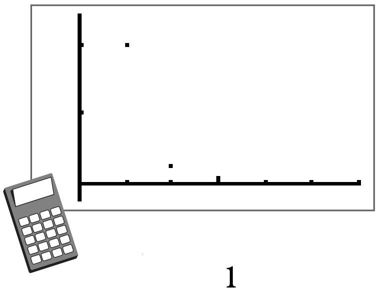
Pour $n \in \{1,2,\ldots,6\}$ ces suites ont pour représentation :



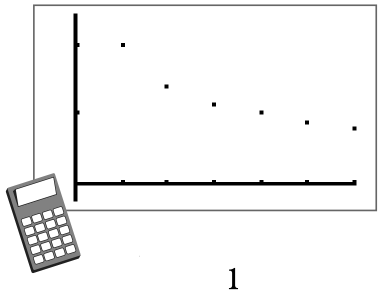
$$u_n = \frac{1}{n}$$



$$u_n = \frac{1}{n^2}$$



$$u_n = \frac{1}{n^3}$$



$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Théorème

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Exemple

Soit u la suite définie par

$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. On a : $|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Définition

On dira que la suite ***u* admet pour limite *L* quand *n* tend vers +∞** si :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - L) = 0.$$

Théorème d'unicité

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n - L\right) = 0$ alors le réel L est unique.

On note alors indifféremment : $\lim\limits_{+\infty} u = L$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$; $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} L$.

On dit que la suite u est **convergente** vers L.

Exemple

Soit u la suite définie par :

$$u_n = 5 + \frac{1}{n^3}.$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - 5) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.

La suite u converge vers 5.

Applications/Exercice 2

1B. Suites divergentes

Définition

Soient u une suite numérique et 10^p ($p \in \mathbf{N}^*$) une puissance entière quelconque de 10.

On dira que ***u* tend vers +∞ quand *n* tend vers +∞** si l'on peut trouver des indices n pour lesquels $u_n > 10^p$ (c'est à dire qui rendent le terme général u_n plus grand que 10^p).

On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exemple

Soit u la suite définie par $u_n = \sqrt{n}$.

Pour obtenir $u_n > 10^{50}$ il suffit que $\sqrt{n} > 10^{50}$ soit $n > 10^{100}$.

Applications/Exercice 3

Théorème – Limites des suites de référence

$$\lim_{n\to+\infty} n = \lim_{n\to+\infty} n^2 = \lim_{n\to+\infty} n^3 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

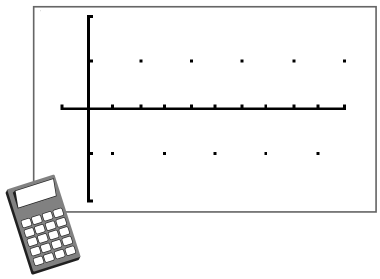
Définition

Les suites qui ne sont pas convergentes sont dites **divergentes.**

Remarque

Les suites divergentes ne tendent pas nécessairement vers - ∞ *ou* + ∞. Par exemple, la suite définie par $u_n = (-1)^n$ et dont la représentation suit n'a pas de limite finie et ne tend pas vers - ∞ *ou* + ∞.

$\left((-1)^n\right)_n$ est une suite divergente.



1C. Suites et fonctions

Théorème

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(n) = L$.

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

Conséquence

L'étude de la convergence des suites $u_n = f(n)$ pourra également se faire en liaison avec l'étude à l'infini des fonctions correspondantes.

Exemple

Soit u la suite définie par $u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$.

On a donc : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n+3}{n+1} = 2$

1D. Opérations sur les limites

Ces énoncés relatifs se déduisent des énoncés relatifs aux suites.

Nous rappelons ces résultats dans les tableaux ci-dessous, où L et L' sont des constantes réelles non nulles et où « *F.I* » (*forme indéterminée*) indique les cas où l'on ne peut immédiatement conclure.

Limite de la somme

Si...		...alors
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$
L	$+\infty$	$+\infty$
L	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$F.I$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Limite du produit, de l'inverse et du quotient

Si...		...alors		
$\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert u_n\rvert$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert v_n\rvert$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert u_n.v_n\rvert$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\lvert v_n\rvert}$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$
0	0	0	$+\infty$	$F.I$
0	L'	0	$1/L'$	0
0	$+\infty$	$F.I$	0	0
L	0	0	$+\infty$	$+\infty$
L	L'	$L.L'$	$1/L'$	L/L'
L	$+\infty$	$+\infty$	0	0
$+\infty$	0	$F.I$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	L'	$+\infty$	$1/L'$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$F.I$

Les résultats précédents sont indiqués **en valeur absolue**. On devra nécessairement étudier le signe des expressions traitées.

Applications/Exercice 4

2. Autres théorèmes relatifs aux suites

2A. Limites et inégalités

Théorème

Soient u et v deux suites telles qu'à partir d'un indice fixé n_0 on ait $u_n \leq v_n$.

a) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple

Soit v la suite définie sur **N** par :

$$\begin{cases} v_n = 3n+1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ v_n = n-1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Posons $u_n = n - 1$. Pour tout indice fixé n on a : $u_n \leq v_n$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Applications/Exercice 5

Théorème

Soient u et v deux suites telles qu'à partir d'un indice fixé n_0 on ait $|u_n| \leq v_n$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemple

Soit u la suite définie sur **N** par $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$.

On a :

$$|u_n| = \left|\frac{n+(-1)^n}{n^2+1}\right| \leq \frac{n+1}{n^2+1}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$ c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Applications/Exercice 6

Théorème des gendarmes

Soient u, v et w trois suites telles qu'à partir d'un indice fixé n_0 on ait $u_n \leq v_n \leq w_n$.

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = L \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} v_n = L$$

Exemple

Soit v la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2n+1}$.

On a $\dfrac{n-1}{2n+1} \leq \dfrac{n+(-1)^n}{2n+1} \leq \dfrac{n+1}{2n+1}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

Applications/Exercice 7

2B. Limites et variations d'une suite

Théorème

Si $(u_n)_n$ est une suite croissante et majorée alors $(u_n)_n$ est convergente.
Si $(u_n)_n$ est une suite décroissante et minorée alors $(u_n)_n$ est convergente.

Exemple

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 \quad si \quad n \geq 0 \end{cases}$$

On admet que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $u_n < 2$, c'est-à-dire on admet que $(u_n)_n$ est majorée par 2.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = 1 - \frac{1}{2}u_n = \frac{2-u_n}{2} > 0$$

d'où u est une suite (strictement) croissante.

$(u_n)_n$ est une suite croissante et majorée donc $(u_n)_n$ est convergente.

Remarque

Le théorème précédent assure l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ bien que sa valeur L ne soit pas connue.

Ainsi par « passage à la limite » dans l'égalité, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ la limite L vérifie :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \frac{1}{2} . \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + 1$ d'où $L = \frac{1}{2}L + 1$ soit $L = 2$.

Applications/Exercice 8

2C. Limites et comportements asymptotiques comparés

Théorème

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} ln(n) = +\infty$.

b) Si $a \in \,]-1\,;+1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$; Si $a \in \,]+1\,;+\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

c) Si $a > 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a = +\infty$.

Si $a < 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a = 0$.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$; **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,01^n = +\infty$; **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{0,3} = +\infty$; **d)** $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-2} = 0$.

Théorème – Croissances comparés

a) Pour $\alpha > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{ln(n)}{n^\alpha} = 0$.

b) Pour $\alpha > 0$ et $a > 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.

Exemples

a) $\frac{ln(n^3)}{n^2-5} = \frac{3.ln(n)}{n^2\left(1-\frac{5}{n^2}\right)} = 3 \times \frac{ln(n)}{n^2} \times \frac{1}{1-\frac{5}{n^2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{ln(n)}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{5}{n^2}\right) = 1$, d'où $\lim \frac{ln(n^3)}{n^2-5} = 0$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{10}}{1,2^n} = 0$.

Applications/Exercice 9

Exercices autocorrectifs

Applications

Définition de la limite d'une suite

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_n$ définie sur **N** et de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^2}.$$

1. a) À partir de quel indice n_0 a-t-on : $0 < u_n < 10^{-30}$?

b) Étant donné un entier $p \in N^\star$, pour quels indices n a-t-on : $0 < u_n < 10^{-p}$?

2. Que concluez-vous ?

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_n$ définie sur **N** et de terme général :

$$u_n = \frac{3n^2+1}{n^2}.$$

En appliquant la définition de la limite, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_n$ définie sur **N** et de terme général $u_n = n^2$.

1. a) À partir de quel indice n_0 a-t-on : $u_n \geq 10^{30}$?

b) Étant donné un entier $p \in \mathbf{N}^\star$, pour quels indices n a-t-on : $u_n \geq 10^p$?

2. Que concluez-vous ?

Calcul de la limite d'une suite

Exercice 4

Étudier la limite des suites $(u_n)_n$ dont le terme général u_n est donné ci-dessous :

a) $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$; **b)** $u_n = \dfrac{2n^2+3}{n(1-n)}$; **c)** $u_n = \dfrac{\sqrt{n}.(n+1)}{n^2+2}$

d) $u_n = ln(n) - n$; **e)** $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \dfrac{1}{2}n$; **f)** $u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$.

Exercice 5

On considère la suite $(v_n)_n$ définie sur $\mathbf{N}^*$ par :

$$v_n = \frac{(n+2)!}{n^2}.$$

1. Montrer que pour tout indice fixé $n \geq 1$ on a : $n \leq v_n$.

2. En déduire la limite de la suite $(v_n)_n$.

Exercice 6

On considère la suite $(v_n)_n$ définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$v_n = \frac{-n}{\sqrt{n^4+1}}.$$

1. Montrer que pour tout indice fixé n, $n > 0$, on a :

$$|v_n| < \frac{1}{n}.$$

2. En déduire la limite de la suite $(v_n)_n$.

Exercice 7

On considère les suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ définies sur $\mathbf{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{n^2}{n^2+n} \quad ; \quad v_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} \quad ; \quad w_n = \frac{n^2}{n^2+1}.$$

1. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

2. Montrer que pour tout indice fixé $n > 2$ on a : $u_n < v_n < w_n$.

3. En déduire la limite de la suite $(v_n)_n$.

Exercice 8

Soit u la suite définie par :

$$u_0 = 10$$
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \quad si \quad n \geq 0$$

1. Déterminer ses 6 premiers termes.

2. On admet que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n > 2$. Montrer que u est une suite strictement décroissante.

3. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente. On note L sa limite.

4. Quelle est la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$?

5. À l'aide de l'égalité, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ montrer que $L = \frac{1}{2}L + 1$.

6. En déduire la valeur de L.

Limites et comportements asymptotiques comparés

Exercice 9

Étudier la limite des suites $(u_n)_n$ dont le terme général u_n est donné ci-dessous :

a) $u_n = \dfrac{n^2}{2^n + 1}$; **b)** $u_n = \dfrac{(n-1)\ \ln(n)}{n(n+1)}$; **c)** $u_n = 2^n - n^3$.

Approfondissements

Étude de la suite $\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)_n$

Exercice 10

1. Montrer que pour n entier ≥ 2 :

$$\frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n-1)n}.$$

2. Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1).n}.$$

a) À l'aide du **1.** simplifier l'expression de v_n.

b) En déduire que la suite v est majorée. Calculez sa limite.

3. Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

a) Déterminer ses 5 premiers termes.
b) Montrer que la suite u est croissante.
c) Montrer que $u_n < v_n$.
d) En déduire que la suite u est majorée.
e) Montrer que u est convergente.
f) À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée de u_{10}.

(On montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\pi^2}{6}$).

Suites arithmétiques
Suites géométriques

Séquence 3

Prérequis

- Généralités sur les suites
- Convergence des suites

Objectifs

- Consolidation et approfondissement des acquis sur les suites arithmétiques et géométriques

Contenu

1. Suites arithmétiques

Définition

On appelle **suite arithmétique** définie sur $\mathbb{N}^*$ une suite récurrente définie par son premier terme u_1 et par la relation $u_{n+1} = u_n + r$ pour $n \geq 1$.

Le réel r est appelé la **raison** de la suite arithmétique.

Exemples

Les suites 1, 1, 1,... et 1, 3, 5... et 3,-1, -5,-9, ... sont trois suites arithmétiques définies respectivement par $u_1 = 1, r = 0$; $u_1 = 1, r = 2$ (suite des nombres impairs) et $u_1 = 3, r = -4$.

Applications/Exercice 1

Propriété 1

Si $(u_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ est la suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r, alors :

a) $u_n = u_1 + (n-1)r$;

b) $u_1 + \ldots + u_n = n.\dfrac{(u_1+u_n)}{2}$.

Remarques

1. Conséquence du **a)** : la donnée de u_1 et r définit de façon unique la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. $$u_1 + \ldots + u_n = \text{(nombre de termes)} \frac{(1^{\text{er}}\,\text{terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Exemples

1. Le 513$^{\text{e}}$ nombre impair est : $u_{513} = 1 + (513 - 1).2 = 1025$ et la somme des 513 premiers nombres impairs est :

$$S_{513} = u_1 + \ldots + u_{513} = \frac{513.(1 + 1025)}{2} = 263169 = 513^2.$$

2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $r = 1$, alors :

$$1 + \ldots + n = \frac{n.(n+1)}{2}.$$

Applications/Exercice 2

Remarque

La somme $u_1 + \ldots + u_n$ des n premiers termes de $(u_n)_n$, appelée suite des sommes partielles de rang n, est encore notée :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \text{ (lire "}\textit{sigma de } i = 1 \text{ à } n \textit{ des } u_i\text{")}.$$

Propriété 2 - Variations

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite arithmétique.
Si $r < 0$ alors $(u_n)_n$ est strictement décroissante.
Si $r = 0$ alors $(u_n)_n$ est stationnaire.
Si $r > 0$ alors $(u_n)_n$ est strictement croissante.

En effet $u_{n+1} - u_n = r$ pour tout indice n.

Remarque

On peut aussi définir une suite arithmétique par son premier terme u_0 et par la relation $u_{n+1} = u_n + r$ (si $n \geq 0$) : u_n est alors le $(n+1)^e$ terme de la série, et la propriété 1 devient :

Propriété 1'

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors :

a) $u_n = u_0 + n.r$

b) $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1).\dfrac{(u_0 + u_n)}{2}$

Propriété 3

Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r, alors $u_n = u_p + (n - p).r$

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique telle que $u_8 = 5$ et $u_{13} = -15$.
Sa raison est :

$$r = \frac{u_{13} - u_8}{13 - 8} = \frac{-15 - 5}{5} = -4$$

et son premier terme : $u_0 = u_8 + (0 - 8).r = 37$.

Applications/Exercice 3

2. Suites géométriques

Définition

On appelle **suite géométrique** définie sur $\mathbf{N}^\star$ une suite récurrente définie par son premier terme u_1 et par la relation $u_{n+1} = q.u_n$ pour $n \geq 1$.

Le réel q est appelé la **raison** de la suite géométrique.

Exemples

1, 1, 1,...; 1, 2, 4,... ; 1, -1/3, 1/9, -1/27, ... sont trois suites géométriques définies respectivement par $u_1 = 1, q = 1$; $u_1 = 1, q = 2$ *et* $u_1 = 1, q = -1/3$.

Applications/Exercice 4

Remarque

Si $q < 0$ la suite est alternée c'est-à-dire que deux termes consécutifs quelconques ont des signes contraires.

Propriété 4

Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est la suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q alors :

a) $u_n = u_1.q^{n-1}$.

b) Si $\boldsymbol{q \neq 1}$ alors : $u_1 + \ldots + u_n = u_1.\dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.

Si $\boldsymbol{q = 1}$ alors : $u_1 + \ldots + u_n = n.u_1$.

Remarques

1. Conséquence du ***a)*** : la donnée de u_1 et q définit de façon unique la suite géométrique $(u_n)_n$.

2. Pour $q \neq 1$, $u_1 + \ldots + u_n = u_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Exemple

1, -1/3, 1/9, -1/27, … est la suite géométrique définie par $u_1 = 1$ et $q = -1/3$. (c'est une suite alternée).

Son 10^e terme est $u_{10} = u_1.q^{10-1} = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^9$.

et la somme de ses 10 premiers termes est :

$$u_1+\ldots+u_{10}=u_1.\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{10}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1\ -\ \frac{1}{59049}}{1\ +\ \frac{1}{3}}=\frac{14762}{19683}.$$

Applications/Exercice 5

Propriété 5 - Variations

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite géométrique à termes **strictement positifs**.
Si $0 < q < 1$ alors $(u_n)_n$ est strictement décroissante.
Si $q = 1$ alors $(u_n)_n$ est stationnaire.
Si $q > 1$ alors $(u_n)_n$ est strictement croissante.

En effet $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$, et par exemple si $0<q<1$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$

donc $u_{n+1} < u_n$ *car* (u_n) est à termes **strictement positifs** et $(u_n)_n$ est strictement décroissante.

Remarque

On peut aussi définir une suite géométrique par son premier terme u_0 et par la relation $u_{n+1} = q.u_n$ (si $n \geq 0$) : u_n est alors le $(n+1)^e$ terme de la série, et la propriété 1 devient :

Propriété

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q alors :

a) $u_n = u_0.q^n$

b) Si $\boldsymbol{q}\neq\mathbf{1}$ alors : $u_0+u_1+\ldots+u_n=u_0.\frac{1\ -\ q^{n+1}}{1\ -\ q}$

Si $\boldsymbol{q}=\mathbf{1}$ alors : $u_0+u_1+\ldots+u_n=(n+1)u_0$

Remarque

En particulier pour $u_0 = 1$ et $q \neq 1$.

$$1+\ q\ +\ \ldots\ \ +\ q^n\ =\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple

$1+3+3^2+\ldots+3^{15}=\dfrac{1-3^{16}}{1-3}=21\ 523\ 360.$

Propriété 7

Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q alors $u_n = u_p . q^{n-p}$.

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique telle que $u_8 = 5$ et $u_{13} = -160$.
La raison q vérifie :

$$q^{13-8}=\frac{u_{13}}{u_8}=\frac{-160}{5} \text{ c'est à dire } q^5=-32 \text{ donc } q=-2.$$

Son premier terme est $u_0=\dfrac{u_8}{q^8}=\dfrac{5}{(-2)^8}=\dfrac{5}{256}$.

Applications/Exercice 6

3. Convergences des suites

3A. Convergence des suites arithmétiques

Propriété - Convergence des suites arithmétiques

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est la suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r : $u_n = u_1 + (n-1)r$.

Si $r < 0$ alors $\lim u_n = -\infty$, c'est-à-dire $(u_n)_n$ diverge.
Si $r = 0$ alors $\lim u_n = u_1$, c'est-à-dire $(u_n)_n$ converge.
Si $r > 0$ alors $\lim u_n = +\infty$, c'est-à-dire $(u_n)_n$ diverge.

Exemples

1. Pour $(u_n)_n$ définie par $u_1 = 3$ et $r = -2$: $u_n = 3 - 2(n-1) = -2n + 6$ d'où $\lim u_n = -\infty$.

2. Pour $(u_n)_n$ définie par $u_1 = 5$ et r = 3 : $u_n = 5 + 3(n-1) = 3n + 2$ d'où $\lim u_n = +\infty$.

Applications/Exercice 7

Remarque - Convergence de la somme $S_n = u_1 + \ldots + u_n$

Rappelons que :

$$S_n = \frac{n(u_1+u_n)}{2} = \frac{n(2u_1+(n-1)r)}{2}$$

Si $r = u_1 = 0$ (suite nulle) alors $\lim S_n = 0$, c'est-à-dire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge.
Sinon $\lim |S_n| = +\infty$, c'est à dire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ diverge.

3B. Convergence des suites géométriques

Propriété - Convergence des suites géométriques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite géométrique de premier terme $u_1 \neq 0$ et de raison q. On a :

$$u_n = u_1.q^{n-1}.$$

Si $-1 < q < +1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, , c'est-à-dire $(u_n)_n$ converge vers 0.

Si $q = +1$ alors $(u_n)_n$ est stationnaire et converge vers u_1.
Si $q \leq -1$ alors $(u_n)_n$ est alternée et diverge.
Si $1 < q$ alors $(u_n)_n$ diverge vers $-\infty$ ou vers $+\infty$.

Exemples

1. Pour $(u_n)_n$ définie par $u_1 = 3$ et $q = -\frac{1}{2}$: $u_n = \frac{3}{(-2)^{n-1}}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Pour $(u_n)_n$ définie par $u_1 = 5$ et $q = 1$: $u_n = 5$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.
3. Pour $(u_n)_n$ définie par $u_1 = -2$ et $q = 3$: $u_n = \text{-}2.3^{n-1}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Applications/Exercice 8

Propriété - Convergence de la somme $S_n = u_1 + \ldots + u_n$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite géométrique de premier terme $u_1 \neq 0$ et de raison q.
Si $-1 < q < +1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{u_1}{1-q}$, c'est à dire $(S_n)_n$ est convergente.

Sinon $(S_n)_n$ diverge.

En effet, $u_1 + \ldots + u_n = u_1.\frac{1-q^n}{1-q}$ et si $-1 < q < +1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Par ailleurs, si $q < -1$ ou $1 < q$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = +\infty$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |S_n| = +\infty$; $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

Exemples

1. Pour $(u_n)_n$ définie par $u_1 = 3$ et $q = -\frac{1}{2}$: $S_n = 3.\ \dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{3}{1+\frac{1}{2}} = 2$

2. Pour $(u_n)_n$ définie par $u_1 = 5$ et $q = 1$: $S_n = 5n$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

3. Pour $(u_n)_n$ définie par $u_1 = -2$ et $q = 3$:

$S_n = -2.\dfrac{1-3^n}{1-3} = \left(1-3^n\right)$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$.

Applications/Exercice 9

Exercices autocorrectifs

Applications

Suites arithmétiques

Exercice 1

Soit $(u_n)_n$ la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $u_n = an + b$.

Montrer que $(u_n)_n$ est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme u_0 et la raison r.

Exercice 2

La suite arithmétique $(u_n)_n$ est définie sur $\mathbf{N}^\star$ par $u_1 = 3$ *et* $r = -2$.

Calculer u_{13} *et* $S_{13} = u_1 + \ldots + u_{13}$.

Exercice 3

1. Déterminer la suite arithmétique définie sur $\mathbf{N}^\star$ par $u_5 = 17$ *et* $u_{18} = 108$.

2. Calculez la somme de ses 100 premiers termes.

Suites géométriques

Exercice 4

Soit $(u_n)_n$ la suite définie sur $\mathbf{N}^\star$ par $u_n = a.b^{n-1}$.

Montrer que $(u_n)_n$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme u_1 et la raison q.

Exercice 5

La suite géométrique $(u_n)_n$ est définie sur $\mathbf{N}^\star$ par $u_1 = 3$ *et* $q = -2$. Calculer u_{11} *et* $S_{11} = u_1 + \ldots + u_{11}$.

Exercice 6

1. Existe-t-il des suites géométriques définie sur $\mathbf{N}^\star$ telles que :

$$u_5 = 3 \text{ et } u_9 = \frac{1}{27} \text{ ?}$$

2. Si oui, calculez la somme de leurs 15 premiers termes.

Limite des suites

Exercice 7

Déterminer la limite de la suite arithmétique définie sur **N*** par $u_1 = 3$ et $r = 0,8$.

Exercice 8

Déterminer la limite des suites géométriques définies sur **N*** par :

a) $u_1 = -2$ et $q = 0,8$ **b)** $u_1 = 3$ et $q = -1,2$.

Exercice 9

Soit $(u_n)_n$ la suite géométrique définie sur **N*** par son premier terme u_1 et sa raison q.
On note $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Déterminer la limite de S_n si :

a) $u_1 = -2$ et $q = 0,8$ **b)** $u_1 = 3$ et $q = -1,2$.

Approfondissements

Suites arithmétiques

Exercice 10

Les nombres impairs formant une suite arithmétique, montrez que la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2.

Exercice 11

Etudier la limite de la suite $(u_n)_n$ de terme général :

$$u_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}.$$

Exercice 12

On considère la suite $(u_n)_n$ définie sur **N*** par : $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - 3$

1. Exprimer u_n en fonction de n .

2. Pour quelle valeur de n a-t-on : $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = -3672$?

Suites géométriques

Exercice 13

$(u_n)_n$ est la suite géométrique, définie sur $\mathbf{N}^\star$, de premier terme $u_1 > 0$ et de raison $q > 0$.

1. Montrer que $(v_n)_n$ de terme général $v_n = ln(u_n)$ est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme et la raison.

2. On considère la suite $(w_n)_n$ définie sur $\mathbf{N}^\star$ par : $w_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$.
Exprimer w_n en fonction de n .

3. On considère la suite $(z_n)_n$ définie sur $\mathbf{N}^\star$ par : $z_n = ln(u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n)$.
Exprimer z_n en fonction de n .

Suite arithmético - géométrique

Exercice 14

Soit $(u_n)_n$ la suite définie sur $\mathbf{N}^\star$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 4. \end{cases}$$

A. Étude numérique

1. a) À l'aide d'une calculatrice, déterminer et représenter ses 6 premiers termes.

b) Entrevoir le comportement de la suite $(u_n)_n$ à l'infini.

c) Entrevoir le comportement de la somme $u_1 + \ldots + u_n$ à l'infini.

B. Étude analytique

On considère la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_n - 8$.

2. a) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

b) Donner l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

c) Quelle est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?

3. a) Exprimer la somme $S'_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ en fonction de n.

b) En déduire l'expression de $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ en fonction de n.

c) Quelle est la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 15 (d'après sujet BTS)

Soit u la suite numérique définie sur $\mathbf{N}^\star$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = a.u_n + b.n + c \quad (n > 0) \end{cases}$$

où a, b et c sont trois constantes réelles.

1. Calculer a, b et c sachant que : $u_2 = 3$, $u_3 = 4$ *et* $u_4 = 3$.

2. On prend : $a = 2$, $b = -3$ *et* $c = 4$.

Soit la suite v définie sur $\mathbf{N}^\star$ par : $v_n = u_n - 3n + 1$, pour tout n élément de $\mathbf{N}^\star$.

a) Montrer que v est la suite géométrique de premier terme $v_1 = -1$ et de raison $q = 2$.

b) Calculer v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.

c) Pour n entier supérieur ou égal à 2, calculer $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ en fonction de n.

d) En déduire $S'_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ en fonction de n.

e) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n$

Exercice 16

Étude de la suite $\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\right)_n$

A. Préliminaire

Calculer la somme $S_n = 1 + \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et montrer que $S_n < 2$.

B. Soit *u* la suite définie sur $\mathbf{N}^\star$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

1. Déterminer ses 5 premiers termes.

2. Montrer que la suite u est croissante.

3. On admet que « n, $n \in \mathbf{N}$ *et* $n \geq 2 \Rightarrow n! \geq 2^{n-1}$.

a) Montrer que :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

b) En déduire que la suite u est majorée.

4. Montrer que u est convergente.

5. À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée de u_{10}.

(On montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$)

Travaux pratiques

Exercice 17 - Croissance d'une entreprise

L'analyse des résultats d'une entreprise au 1er janvier de chaque année fait apparaître tous les ans une progression de 4 % de sa production. Celle-ci était de 150 000 unités le 1.1.1997.

Soit u_n la valeur (en milliers d'unités) de la production au 1er janvier de l'année de rang n ($u_0 = 150$ *en* 1997, u_1 en 1998 etc.).

1. Compléter le tableau suivant qui donne l'évolution de la production de l'entreprise du 1.1.1997 au 1.1.2001 :

Année	1997	1998	1999	2000	2001
Rang de l'année i	0	1	2	3	4
Production u_i (en milliers d'unités)	150	…	…	…	…

2. a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite $(u_n)_n$ dont on précisera les caractéristiques.

b) Exprimer u_n en fonction de n.

3. a) Si cette évolution se poursuit, quelle production peut-on prévoir au 1.1.2006 ? (On donnera une valeur approchée à un millier d'unités près par défaut.)

b) À quelle date observera-t-on que la production initiale a doublé ?

4. À quelle date observera-t-on que la production a dépassé 240 milliers d'unités, ainsi que la valeur totale de la production depuis le 1.1.1997 ?

5. Si le 1.1.1997, l'entreprise avait souhaité doubler en 10 années sa production, quel aurait dû être le taux, annuel et constant, de variation de sa production ?

Exercice 18 - Croissance de populations (BTS comptabilité et gestion des organisations)

Dans une région, une étude a porté sur l'évolution de la population de trois villes entre 1970 et 1990.

Partie A - Étude théorique

On note *f, g, h* les fonctions définies pour tout nombre réel x de l'intervalle [0; 20] par :

$$f(x) = e^{0,1x};\ g(x) = 4\, e^{-0,1x}\ ;\ h(x) = 0,3x + 0,6.$$

1. a) Calculer la dérivée f' de la fonction f. En déduire le tableau de variation de f sur [0; 20].

b) Calculer la dérivée g' de la fonction g. En déduire le tableau de variation de g sur [0; 20].

2. Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution x_0 et une seule dans [0; 20] et déterminer la valeur exacte de x_0. Donner une valeur décimale approchée de x_0 à 10^{-1} près.

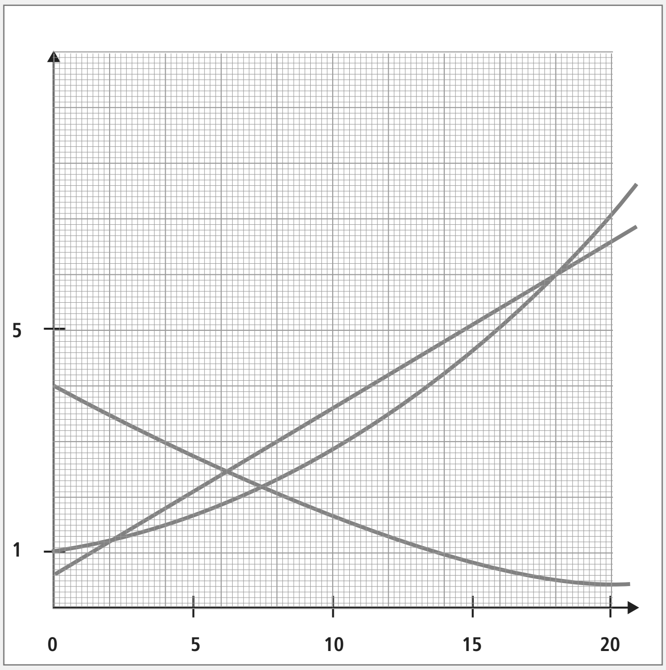
3. Soit d la fonction définie sur [0; 20] par $d(x) = h(x) - f(x)$.

a) Calculer la dérivée d' de la fonction d. Montrer que l'équation $d'(x) = 0$ admet une solution α et une seule dans [0; 20] et déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de $d(\alpha)$.

b) Étudier le signe de d'. Dresser le tableau de variation de d.

c) En déduire que l'équation $f(x) = h(x)$ admet deux solutions, distinctes x_1 *et* x_2 sur [0; 20], où $x_1 < x_2$. Justifier les encadrements : $2,1 < x_1 < 2,2$ *et* $17,8 < x_2 < 17,9$.

d) Les courbes représentatives de *f, g, h* sur [0; 20] sont tracées ci-après.



Unités graphiques : 0,5 cm sur l'axe des abscisses ; 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Indiquer sur le graphique laquelle de ces courbes correspond à *f, à g, à h*.

Partie B - Application démographique

Pour chacune des trois villes le nombre d'habitants, exprimé en milliers, pour l'année $(1970 + n)$, où n est un entier positif ou nul compris entre 0 et 20, est donné par les relations suivantes :

$$\text{Ville } V_1 : f(n) = e^{0,1.n}$$
$$\text{Ville } V_2 : g(n) = 4\,e^{-0,1.n}.$$
$$\text{Ville } V_3 : h(n) = 0,3n + 0,6.$$

1. En utilisant les résultats de la partie A :

a) Déterminer l'année au cours de laquelle les villes V_1 et V_2 ont le même nombre d'habitants.

b) Déterminer les années au cours desquelles les villes V_1 et V_3 ont le même nombre d'habitants.

c) Déterminer l'année au cours de laquelle on a enregistré le plus grand écart entre les populations de V_1 et V_3 .

2. Un statisticien affirme que « Le nombre d'habitants de la ville V_1 a augmenté de 10,5 % par an entre 1970 et 1990 ».

On note P_0 la population de V_1 en 1970 et P_n la population en $(1970 + n)$ exprimées en milliers d'habitants. Par hypothèse $P_0 = 1$.

a) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.

b) Exprimer P_n en fonction de n .

c) Comparer les résultats obtenus pour la population de la ville V_1 en $1970 + n$ en modélisant cette population par $f(n)$ et par P_n.

Obtient-on à 20 individus près les mêmes résultats en 1972 ? en 1987 ?